



# ***“Precálculo de Funciones”***

Tesis que como Requisito para obtener la Maestría en Educación Científica presenta:

***Ma. Guadalupe Jáquez Carrasco***

*Directores de Tesis:*

Dr. Antonino Pérez Hernández  
M.C. Amaro Aguilar Martínez

Chihuahua, Chih., Julio de 2009.

---

---

### **Dedicatoria:**

- A mis padres, por estar siempre ahí cuando los necesito, por sus consejos, por alentarme en mi superación personal y profesional, por su amor y apoyo incondicionales.
  
- A Dios, por sus todas sus bendiciones y por permitirme lograr una de mis metas.

---

---

# ÍNDICE

	Pág.
I.- Resumen.....	1
II.- Introducción.....	2
II.1.- Antecedentes.....	2
II.2.- Justificación.....	4
II.3.- Problemática.....	15
II.4.- Objetivos.....	19
II.5.- Descripción del Producto.....	20
III.- Fundamentos Pedagógicos y Disciplinarios.....	21
III.1.- Fundamento Pedagógico.....	21
III.2.- Fundamentos Disciplinarios.....	26
IV.- Desarrollo.....	62
V.- Implementación.....	71
VI.- Conclusiones.....	75
VI.- Bibliografía.....	76

---

## ***I.- RESUMEN***

Las problemáticas a las que nos enfrentamos los profesores de matemáticas en el nivel medio superior, además de la naturaleza lógica de la asignatura y las directrices a las cuales nos sujetamos al pertenecer a determinados subsistemas educativos, están muy relacionadas con la etapa en la que nuestros jóvenes se encuentran: la adolescencia.

Con la finalidad de evitar el uso de métodos y técnicas de enseñanza tradicional y disminuir la problemática actual, se propone el uso de herramientas visuales como los mapas conceptuales y mentales, diagramas de flujo, cuadros comparativos, etc., como estrategia de enseñanza – aprendizaje en el cálculo y manejo de funciones matemáticas, las cuales nos permitirán lograr en el estudiante un aprendizaje realmente significativo.

Está basado en la Reforma Integral de la Educación Media Superior del año 2008, donde la educación se centra en el aprendizaje con un enfoque basado en competencias, como consecuencia del Marco Constructivista y apoyado en sus principales exponentes.

Se presentan además una serie de ejercicios con la intención de que el estudiante se identifique con ellos y sea capaz de resolverlos mediante la integración de los conceptos previos con los nuevos y además que pueda aplicarlos en cualquier situación que se le presente.

## ***ABSTRACT***

The problems we face as math teachers at the mid level education, besides the fact of the logical nature of the subject and the guidelines to which we are subject belonging to certain educational subsystems are highly related to the stage where the youngsters are living: adolescence.

To avoid the use of traditional teaching methods and techniques and reduce the problem, the use of visual tools is recommended such as concept and mental maps, flow charts, comparative tables, etc., this as a strategy for teaching - knowledge on calculus and math functions, which will allow us to achieve the student's significant knowledge.

It's based on the restructure of the mid level education of 2008, where education is found in the knowledge focused on competitiveness, as a consequence of a constructive base and supported on it's principal expositors.

There are also several exercises presented with the purpose of the student identifying them with their own person and for them to be capable of solving them applying the previous concepts with the new ones and additionally being able to apply them on any situation that is presented.

---

## **II.- INTRODUCCIÓN**

### **II.1 ANTECEDENTES**

El problema de la educación de las ciencias en México es grande y complejo, ya que se presentan graves deficiencias educativas.

Las estrategias que se han utilizado son de memorización, que les impiden adquirir habilidades que puedan ser aplicadas en el desarrollo de la vida cotidiana para resolver diferentes problemas a los cuales se enfrentarán nuestros estudiantes.

Este tipo de aprendizaje memorístico da como resultado un aumento en el índice de reprobación, deserción, baja eficiencia terminal y por lo tanto un aprendizaje de baja calidad.

El aprendizaje de baja calidad es producto de memorizaciones sin sentido y de bajo nivel cognoscitivo.

- Se busca mejorar la enseñanza de las ciencias capacitando a los docentes y logrando que los alumnos obtengan experiencias aplicadas en su vida cotidiana y en la resolución de problemas en su entorno.
- Que los docentes transmitan a sus alumnos un cambio de actitud hacia la ciencia.
- Aprender a hacer ciencia implica pensar y no memorizar, recreando razonamientos y experimentos donde se sostienen las teorías actuales.
- Se está haciendo una revisión y rediseño curricular de los programas de estudio, centrados en el aprendizaje, propiciando obtener un aprendizaje significativo para el alumno.

Se pretende elevar la calidad de la educación y estimular las habilidades necesarias para que los estudiantes adquieran un aprendizaje permanente y reflexivo, elaborar preguntas, hacer predicciones, describir material y procedimientos a seguir, esto pone en juego su ingenio y curiosidad, su constancia, el desarrollo de su sensibilidad hacia los seres vivos y el medio ambiente.

La educación científica forma parte de la cultura en las sociedades modernas.

La enseñanza vivencial e indagatoria de la ciencia se inicia en la curiosidad natural por conocer su alrededor esto ayuda a los estudiantes a desarrollar habilidades y actitudes de aprendizaje, es muy importante para aumentar esa curiosidad mezclar en las estrategias la motivación y el interés por el tema a desarrollar, esto dará como resultado niños y jóvenes listos para competir por empleos de calidad.

Actualmente vivimos en una sociedad de conocimientos donde la competencia por los empleos es feroz.

El uso práctico y diario del conocimiento científico es ilustrativo no solo en los laboratorios sino en la vida diaria.

Identificando necesidades locales y el uso de herramientas con el estudio de la ciencia permiten a los alumnos proponer soluciones a problemas de su comunidad y contribuir a dichas soluciones.

En este proceso se confrontan ideas con la realidad, se desarrolla habilidades realmente deseadas. Los estudiantes aprenden que ir a la escuela no es una actividad inútil, sino que su esfuerzo se puede traducir en logros y beneficios concretos para ellos, y que aprendan lo poderoso en lo personal y social es el conocimiento.

Es necesario propiciar que los alumnos construyan su propio aprendizaje de tal modo que este sea significativo y aplicable.

---

## II.2 JUSTIFICACIÓN

### LA REFORMA INTEGRAL DE LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR (RIEMS)

Cada uno de los subsistemas que componen la Educación Media Superior trabajan de manera independiente y no se cuenta actualmente con algún sistema de comunicación entre ellos. Es necesario que estos subsistemas trabajen en conjunto para encontrar objetivos comunes que permitan crear espacios de formación para personas cuyos conocimientos y habilidades sean la base para el desarrollo de sus estudios superiores o en el trabajo.

Los individuos que egresan de nuestros planteles son personas que se encuentran en edad de ejercer sus derechos y obligaciones como ciudadanos; las actitudes y valores necesarios para tener un impacto positivo en la sociedad serán adquiridas durante su estancia en nuestras escuelas y serán esenciales para que nuestros jóvenes logren obtener un empleo, que les ofrezca posibilidades de desarrollo laboral.

Para que nuestro país responda a los desafíos que diariamente se presentan, ya sean económicos o sociales es necesario que se imparta una educación de calidad.

El perfil del bachiller debe tener pluralidad de modelos para atender una población diversa con diferentes intereses y aspiraciones, además de contar con objetivos comunes esenciales.

La reforma contempla cuatro ejes:

- 1.- El marco curricular basado en competencias, que estará dirigido a proporcionar una identidad clara a las necesidades de los estudiantes.
- 2.- La regulación e integración de las características de las diferentes opciones al sistema educativo nacional de una manera efectiva.
- 3.- El fortalecimiento en el desempeño académico de los alumnos, el mejoramiento en la calidad de las instituciones por alcanzar estándares mínimos, considerando la importancia de la formación docente y apoyo a los estudiantes, así como una evaluación integral.
- 4.- El reconocimiento de los estudios realizados en las diferentes opciones de la EMS mediante una certificación nacional complementaria a la que actualmente emite cada institución, ya que las distintas opciones de la EMS compartirán objetivos fundamentales y participarán en la identidad del nivel educativo.

Según el Sistema para Análisis de la Estadística Educativa, 2005-2006, durante los próximos años se observará un estancamiento en el porcentaje de graduados en el nivel medio superior, lo cual propiciaría una disminución de oportunidades para los jóvenes, así como en el desarrollo social y económico del país. Este sistema educativo sirve de vínculo con la educación superior.

Un desarrollo adecuado de la EMS puede beneficiar al país formando personas preparadas para desempeñarse como ciudadanos, así como acceder a la educación superior o integrarse al sector productivo.

Las deficiencias en la EMS pueden ser un obstáculo para la formación de la población del país y puede frenar el crecimiento de ésta, deteniendo el avance del país.

Algunos aspectos importantes a los que se debe prestar atención en el nivel medio superior son:

1) Ampliación de la cobertura (número de jóvenes que cursa el nivel en relación con aquellos que se encuentran en edad de cursarlo).

- Según las tendencias demográficas durante los próximos años, el crecimiento mayor se localizará en el nivel medio superior.
- La deserción y la baja eficiencia terminal se presentan debido a la incapacidad del sistema para absorber a los egresados de secundaria.
- Se deben aumentar el número de jóvenes preparados en condiciones que exige el marco internacional.
- Es necesario que la educación que se imparta dé respuestas a las necesidades de los estudiantes, que les permitan desempeñarse adecuadamente como miembros de la sociedad, que sus estudios sean significativos para sus aspiraciones como jóvenes.
- Cuando un estudiante se ve obligado a cambiar de escuela o de carrera, a menudo debe comenzar sus estudios desde el principio, debido a la rigidez de los planes de estudio inapropiadas para las realidades regionales y locales o a la incompatibilidad de los estudios de los diferentes planteles, lo cual es desalentador.

Un gran número de casos de estudiantes egresados de secundaria ingresan con muy bajos niveles académicos, lo cual se ve reflejado en sus habilidades, conocimientos y actitudes, que no les permiten desarrollarse adecuadamente en el bachillerato y que afecta a la eficacia de la EMS. Para poder contrarrestar este problema, se deben implantar estrategias para disminuir el índice de reprobación y deserción en nuestros jóvenes.

## 2) Mejoramiento de la calidad.

Es indispensable que los jóvenes permanezcan en la escuela para lograr una formación ética, cívica y el dominio de conocimientos, habilidades y destrezas, los cuales necesitarán en su vida adulta.

Los aprendizajes deben ser significativos para los estudiantes, para que reconozcan las ventajas de lo que aprenden en la escuela, redoblen el esfuerzo y consoliden los conocimientos y habilidades adquiridas.

Los estudiantes encuentran la pertinencia de sus estudios al relacionarlos en sus estudios posteriores o en su trabajo. Esto aumenta la permanencia y cobertura de la EMS.

En la actualidad se requiere que los jóvenes sean personas reflexivas capaces de desarrollar opiniones personales, interactuar en diferentes contextos, asumir un papel propositivo como miembros de la sociedad, discernir aquello que es relevante, disposición de actualizarse de manera continua, etc.

La vida de los jóvenes es compleja y variada, por lo que es necesario que la educación proporcione las herramientas que le permitan desempeñarse de manera satisfactoria. La EMS será más atractiva para los jóvenes si está orientada al desarrollo actual.

Una EMS de mayor calidad, que sea pertinente y responda a las necesidades psicosociales de los estudiantes, deberá tener o poseer calidad en la enseñanza, instalaciones y equipo adecuado.

Para definir el perfil de los docentes, se crean esquemas para la actualización y formación de la planta de docentes que debe tener características particulares como atender las necesidades de los adolescentes; al egresar el joven deberá ejercer sus derechos y obligaciones como ciudadano, orientación vocacional, tutorías, evaluación del aprendizaje como un proceso integral y continuo.

## 3) Búsqueda de equidad.

Las diferencias de calidad de las escuelas son un obstáculo para que existan condiciones que permitan a todas las escuelas y subsistemas avanzar en la misma dirección.

La escuela debe cumplir un papel igualador de oportunidades para que la educación media superior se convierta en un mecanismo en el cual los jóvenes adquieran habilidades y conocimientos que resulten útiles para desarrollarse como personas y actores en la sociedad y el mercado laboral. Se requiere un proyecto integral a partir del reconocimiento de una identidad común entre los subsistemas para definir los retos y objetivos generales que comparten.

La búsqueda de identidad debe entenderse como la unificación de los planes de estudios o la homologación curricular.

Es indispensable impulsar la EMS para contribuir al desarrollo individual y social de los jóvenes del país para evitar el rezago del conjunto de la educación en nuestro país.

La búsqueda de objetivos comunes incluye:

- Énfasis en habilidades y conocimientos básicos o competencias y reestructuración curricular que proporcione a los estudiantes una base sólida que permita adquisición de conocimientos posteriores y tener un buen desempeño en el trabajo.
- Flexibilidad y enriquecimiento de la currícula eliminando secuencias rígidas, creando espacios transdisciplinarios para la integración de conocimientos y habilidades dentro y fuera de los programas académicos de manera que sean evidentes sus aplicaciones en la vida diaria y en el trabajo.
- Programas centrados en el aprendizaje, cambiando las estructuras y objetivos de los cursos y programas en las prácticas docentes, desarrollándose en torno a procesos individuales de adquisición de conocimientos y habilidades de los estudiantes.

La reforma del bachillerato general contempla una nueva estructura de planes de estudios, donde se presentan tres componentes:

- Componente básico.- Se refiere al conjunto de habilidades, conocimientos y actitudes mínimas que el estudiante debe adquirir establecidas en 31 asignaturas.
- Componente propedéutico.- Profundiza ciertos aspectos de la formación básica en cuatro grupos: químico-biológico, físico-matemático, económico-administrativo y humanidades-ciencias sociales.

Se mantuvo la opción de que los estudiantes puedan elegirla.

- El componente de formación para el trabajo cambió su organización a módulos con un enfoque basado en normas de competencia laboral, lo cual hace que el componente sea pertinente y flexible.

Los estudiantes cursan un total de cuatro módulos a partir del tercer semestre, los cuales no necesariamente deben ser cursados en secuencia. Pueden obtener certificados de las competencias que adquieran en estos módulos.

Además de los componentes, se incluye una estrategia de apoyo a estudiantes como tutorías, para prevenir la deserción y reprobación, en las cuales se brindará atención individual a los estudiantes en el aspecto psicológico y pedagógico, para reforzar estrategias pedagógicas y atender a las necesidades personales de los estudiantes.

Las reformas a la EMS y sus equivalentes en el mundo han ocurrido de una manera rápida y como consecuencia del incremento en la escolaridad, así como de la necesidad de plantear propósitos comunes con el fin de ordenar todos los sistemas educativos a nivel mundial, tanto en países desarrollados como en desarrollo.

En un buen número de países la EMS está orientada en dos direcciones, propedéutica y formación para el trabajo. Se han formulado nuevos esquemas de organización que permiten la formación de una identidad bien definida.

La Reforma Integral de la EMS, propone 3 principios básicos:

**1) Reconocimiento universal de las modalidades y subsistemas del bachillerato.**

La diversidad de planes de estudio y modalidades conduce a una dispersión académica.

La adecuación y reforma de programas de manera aislada dificulta que estudien y aprendan los estudiantes.

La EMS debe asegurar que los adolescentes adquieran ciertas competencias comunes y así adquirir un universo común de conocimientos.

Se observa una clara tendencia orientada al fortalecimiento de la formación básica que es un conjunto de habilidades y conocimientos comunes a un grupo de estudiantes con diferentes orientaciones vocacionales.

**2) Pertinencia y relevancia de los planes de estudio.**

Establecer múltiples relaciones entre la escuela y el entorno. Si la educación no es pertinente provoca que los estudiantes abandonen sus estudios.

Los planes de estudio deben atender las circunstancias del mundo actual característico por su dinamismo y pluralidad.

Los jóvenes requieren encontrar un espacio significativo y gratificante en la escuela.

Es necesario investigar a fondo las causas de la deserción y una de ellas es que las escuelas no ofrecen motivación suficiente.

El marco curricular debe ser flexible que reconozca la diversidad de alumnado de la EMS y que atienda necesidades de la población.

### 3) Tránsito entre subsistemas y escuelas.

La posibilidad de transitar entre subsistemas y escuelas es indispensable para disminuir el porcentaje de deserción.

El cambiar de escuela es un evento que es consecuencia de diferentes causas, como cambiar de domicilio, cambiarse de ciudad, buscar un ambiente escolar diferente, etc.

Para facilitar el tránsito entre escuelas resulta indispensable la portabilidad de los estudios, o sea que los jóvenes lleven los grados cursados de una escuela a otra, constancias y certificados que sean reconocidos en las nuevas escuelas.

El nuevo enfoque de la EMS permitirá atender retos en las circunstancias del mundo actual, el cual demanda personas capaces de aplicar sus conocimientos, habilidades y actitudes.

Los profesores no tendrán que realizar nuevas tareas, simplemente cambiar el enfoque de su trabajo.

El perfil está basado en competencias, que son la unidad común para establecer los mínimos requeridos para obtener el certificado de bachillerato. El estudiante deberá poseer la unidad común de conocimientos, habilidades y actitudes.

**La Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Nivel Superior (ANUIES) define competencia como el conjunto de conocimientos, habilidades y destrezas, tanto específicas como transversales que debe tener un titulado para satisfacer las exigencias sociales.**

Las competencias se desarrollan en forma gradual a lo largo del proceso educativo y son evaluadas en diferentes etapas.

En el marco constructivista de la enseñanza se eliminan las prácticas educativas de memorización no significativa, favorece el aprendizaje basado en la resolución de problemas partiendo de la identificación y la aplicación de herramientas necesarias para la resolución, además el desarrollo de capacidades de aprendizaje autónomo y se mantiene fuertemente el trabajo colaborativo.

El aprendizaje significa la reorganización de estructuras cognitivas, demandando tareas diversas y experiencias educativas. Es más importante la calidad del proceso de aprendizaje que la cantidad de datos memorizados, ya que el cúmulo de información está disponible en diversos medios, y los estudiantes sabrán dónde, cómo buscarlos y procesarlos.

Debido a que la educación básica está basada en competencias así como los programas universitarios esto justifica que la educación media superior se introduzca el concepto de competencias.

Se desarrollan tres tipos de competencias:

## **COMPETENCIAS GENERICAS**

Son aquellas que todos los bachilleres deben estar en capacidad de desempeñar, les permite comprender y ser capaz de influir en el mundo, tienen capacidad para aprender en forma autónoma, desarrollar relaciones armónicas con los que les rodean y participar eficazmente en su vida social, profesional y política.

Son **clave**, es decir aplicables en contextos personales, sociales académicos y laborales. Relevantes a lo largo de su vida.

Son **transversales** no se limitan a un campo específico disciplinar asignatura o módulo de estudios, además son **transferibles** refuerzan la capacidad de adquirir otras competencias ya sean genéricas o disciplinares.

Son once las competencias genéricas:

### **SE AUTODETERMINA Y CUIDA DE SI MISMO**

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta objetivos que persigue.

#### **Atributos**

- ✚ Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
- ✚ Identifica sus emociones, las maneja de manera constructiva y reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase.
- ✚ Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.
- ✚ Asume las consecuencias de sus comportamientos y decisiones.
- ✚ Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas.

2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.

#### **Atributos**

- ✚ Valora el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones.
- ✚ Experimenta el arte como un hecho histórico compartido que permite la comunicación entre individuos y culturas en el tiempo y en el espacio a la vez que desarrolla un sentido de identidad.

3. Elige y practica estilos de vida saludables.

**Atributos**

- ✚ Reconoce la actividad física como un medio para su desarrollo físico, mental y social.
- ✚ Toma decisiones a partir de la valoración de las consecuencias de distintos hábitos de consumo y conductas de riesgo.
- ✚ Cultiva relaciones interpersonales que contribuyen a su desarrollo humano y el de quienes lo rodean.

**SE EXPRESA Y COMUNICA**

4. Escucha e interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos, mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiadas.

**Atributos**

- ✚ Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- ✚ Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en que se encuentra y los objetivos que persigue
- ✚ Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral o infiere conclusiones a partir de ellas.
- ✚ Se comunica en una segunda lengua en situaciones cotidianas.
- ✚ Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.

**PIENSA CRÍTICA Y REFLEXIVAMENTE**

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

**Atributos**

- ✚ Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- ✚ Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
- ✚ Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.
- ✚ Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez
- ✚ Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.
- ✚ Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.

6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.

**Atributos**

- ✚ Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
- ✚ Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.
- ✚ Reconoce los propios prejuicios, modifica sus puntos de vista al conocer nuevas evidencias, e integra nuevos conocimientos y perspectivas al acervo con el que cuenta.
- ✚ Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.

**APRENDE DE FORMA AUTONOMA**

7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.

**Atributos**

- ✚ Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.
- ✚ Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.
- ✚ Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.

**TRABAJA EN FORMA COLABORATIVA**

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

**Atributos**

- ✚ Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- ✚ Aporta punto de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- ✚ Asume una actitud constructiva congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

**PARTICIPA CON RESPONSABILIDAD EN LA SOCIEDAD**

9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.

**Atributos**

- ✚ Privilegia el diálogo como mecanismo para la solución de conflictos.
- ✚ Toma decisiones a fin de contribuir a la equidad, bienestar y desarrollo democrático de la sociedad.

- ✚ Conoce sus derechos y obligaciones como mexicano y miembro de distintas comunidades e instituciones, y reconoce el valor de la participación como herramienta para ejercerlos.
- ✚ Contribuye a alcanzar un equilibrio entre el interés y el bienestar individual y el interés general de la sociedad.
- ✚ Actúa de manera propositiva frente a fenómenos de la sociedad y se mantiene informado.
- ✚ Advierte que los fenómenos que se desarrollan en los ámbitos local, nacional e internacional ocurren dentro de un contexto global interdependiente.

10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.

**Atributos**

- ✚ Reconoce que la diversidad tiene lugar en un espacio democrático de igualdad de dignidad y derechos de todas las personas, y rechaza toda forma de discriminación.
- ✚ Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.
- ✚ Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.

11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

**Atributos**

- ✚ Asume una actitud que favorece la solución de problemas ambientales en los ámbitos local, nacional e internacional.
- ✚ Reconoce y comprende las implicaciones biológicas, económicas, políticas y sociales del daño ambiental en un contexto global interdependiente.
- ✚ Contribuye al alcance de un equilibrio entre intereses de corto y largo plazo con relación al ambiente.

**COMPETENCIAS Y CONOCIMIENTOS DISCIPLINARES**

- ✚ Se considera la necesidad de incorporar en los planes de estudio una serie de competencias disciplinares con el objeto de que los profesores orienten su trabajo para el logro de ciertos desempeños y la integración del conocimiento.
- ✚ Se refieren a procesos mentales complejos que permiten a los estudiantes enfrentar situaciones complejas como las que caracterizan el mundo actual.
- ✚ Las competencias extendidas tienen una clara función propedéutica, son pertinentes y preparan al alumno para la educación superior.

## **COMPETENCIAS PROFESIONALES**

- ✚ Son aquellas que se refieren a un campo del quehacer laboral, un enfoque de competencias aplicado al campo profesional, son desempeños relevantes en contextos específicos.
- ✚ El sistema de normas laborales permiten que las instituciones educativas reconozcan criterios de desempeño utilizados en el mercado laboral.
- ✚ Las instituciones educativas preparan a los estudiantes de acuerdo con el sistema de normas, esto facilita que los jóvenes se introduzcan con el éxito en el mercado laboral.
- ✚ La vinculación de la formación profesional con las normas Técnicas de Competencia Laboral eleva el nivel de empleabilidad de los egresados.

Las competencias genéricas y las disciplinares básicas representan la continuidad con la educación básica para preparar a los jóvenes para afrontar los retos de la vida futura.

Las competencias disciplinares extendidas capacitan a los jóvenes para la educación superior.

Las competencias profesionales preparan a los jóvenes para desempeñarse en su vida laboral con mayores posibilidades de éxito.

El Sistema Nacional de Bachillerato supone la formación de un perfil básico compartido. Reconociendo la acreditación automática de ciclos escolares iniciados en una institución y concluidos en otra.

Los acuerdos alcanzados a la fecha estipulan que la implementación de la reforma estará en plena vigencia en el ciclo escolar 2009-2010.

---

## II.3 PROBLEMÁTICA

Impartir las clases de matemáticas a menudo es una tarea difícil para el docente, ya que de entrada una gran parte de nuestros estudiantes estarán renuentes a la asignatura. Con frecuencia no le ven aplicación a lo que se maneja en clase y la materia se vuelve tediosa.

El modelo tradicional de enseñanza, donde los alumnos están acostumbrados a recibir conocimientos no permite que se den cuenta que para aprender ciencias, específicamente las matemáticas, lo importante es comprender, ya que generalmente sólo mecanizan procedimientos.

Uno de los desafíos más importantes para los profesores hoy en día es saber cómo enseñar ciencias.

**Para enseñar ciencias, es necesario que los conocimientos se relacionen de manera integrada y no que se manejen conocimientos aislados.**

El modelo tradicional de recepción de conocimientos elaborados se enfocaba solo a los contenidos, sin poner atención al proceso de enseñanza utilizado, dando por hecho que enseñar es una tarea fácil, que no requiere de mucho esfuerzo o preparación.

Hoy en día, desafortunadamente, este modelo ha dejado huellas, ya que nuestras instituciones de nivel medio superior y superior, contratan maestros a los cuales se les deja ver que es más importante el conocimiento de los contenidos de una materia, que la forma de enseñarlos, es decir, la parte pedagógica.

Algunas de las problemáticas más importantes a las que nos enfrentamos los maestros en la enseñanza de las matemáticas son:

- El rechazo, desagrado y temor hacia la materia. Producto de una “falsa” concepción social o de malas experiencias previas.
- Se manejan grupos muy grandes de 60 alumnos o más, lo que limita el contacto más directo del maestro con sus alumnos, así como las estrategias de enseñanza-aprendizaje empleadas durante la clase.
- Un lenguaje diferente, ya sea cotidiano o científico, entre maestros y alumnos, lo que impide en muchas ocasiones que los aprendizajes sean significativos, ya que no existe una relación entre lo que nuestros jóvenes conciben como el mundo real y las representaciones científicas.

- Contamos con maestros “expertos” en las diferentes áreas, pero en muchos de los casos es sumamente difícil para ellos el poder transmitir sus conocimientos a los alumnos de una manera significativa, debido a una falta de preparación pedagógica.
- Los alumnos, generalmente se limitan a tomar apuntes para después memorizarlos o mejor dicho mecanizar los procedimientos, sin razonarlos o analizarlos en clase, lo que limita la participación y por lo tanto, la posibilidad de hacer que los conocimientos sean significativos.

Y lo peor de todo esto, es que nos hemos acostumbrado a estas situaciones, para los maestros ya es un problema de siempre, algo normal.

- Los programas de matemáticas, generalmente son muy extensos, y se tiene un tiempo muy limitado para cubrirlos, por lo que los maestros al tratar de abarcarlos en su totalidad, se ven presionados, limitando el tiempo para las participaciones, para mostrar más ejemplos de aplicación y sobre todo, para motivarlos en el estudio.

Ante esta situación, el alumno se limita solo a estudiar para pasar los exámenes.

- Otro problema al que nos enfrentamos día con día es a los niveles académicos tan deficientes con los que los alumnos de nuevo ingreso llegan a nuestras instituciones. No se trata de buscar culpables, pero definitivamente algo está pasando que no les permite a nuestros jóvenes tener un aprovechamiento mínimo aceptable, que les impide “ligar” contenidos o continuar con lo aprendido en niveles anteriores.
- Los bajos porcentajes de eficiencia y altos porcentajes de reprobación en las diferentes disciplinas relacionadas con las ciencias, específicamente en matemáticas, con frecuencia orillan al maestro a tomar acciones que en ocasiones terminan en una disminución en el nivel de la clase.

Algunos maestros que imparten materias en las cuales el alumno deberá aplicar las matemáticas como una herramienta, simplemente las evitan o le dan la vuelta, ya que al momento de planear su clase, no incluyen contenidos o materiales que las relacionen con su materia. Es posible que los mismos maestros no vean las interrelaciones entre ambas disciplinas, ni sus aplicaciones, y prefieren evitarse problemas.

Muchas veces es por esta razón que los alumnos no le ven mayor importancia a las matemáticas y no se esfuerzan por aprenderlas, limitándose a sólo aprobar la materia, sin mencionar que para el siguiente curso será mínimo lo que recuerde.

- Las **asesorías** es una ayuda sumamente útil para apoyar a los alumnos que necesitan de un “plus” a la clase; desafortunadamente, son **pocos los alumnos** que recurren a ellas y generalmente acuden en el último momento, cuando ya es inminente el examen (donde el tiempo es muy limitado y el asesor no alcanza a cubrir el material necesario), o bien cuando ya se encuentran con una calificación reprobatoria. La gran ventaja de una buena asesoría, es que la explicación es personalizada y se atienden las necesidades específicas de cada estudiante.
- Otra de las grandes problemáticas de nuestros días es la ideología de algunos **maestros**, que **piensan** que solo con el hecho de **asistir a impartir sus clases cumplen con su compromiso como docentes**, que eso es suficiente para que sus alumnos se encuentren preparados para el siguiente nivel.

Afortunadamente, hoy en día las instituciones de nivel medio superior se preocupan por la preparación adecuada de sus docentes, impartiendo cursos, diplomados, ofreciendo maestrías, etc. para poder ofrecer a la sociedad profesionistas preparados. Pero no todos los maestros sienten la necesidad, tienen el deseo de superarse, las ganas de ser mejores cada día.

Durante la etapa de la adolescencia se presentan muchos cambios, tanto físicos como psicológicos y sociales, por lo tanto es de esperarse que dichos cambios tengan fuerte influencia en el desarrollo de la personalidad de nuestros estudiantes, la cual se va formando poco a poco con el paso de los años y afecta de alguna forma en su comportamiento y actitudes hacia el maestro y hacia sus compañeros. Es por eso que, aunque los problemas a los que nos enfrentamos los docentes son frecuentemente los mismos, éstos no se presentan con la misma intensidad en todos los grupos y mucho menos si dichos grupos son de jóvenes con diferentes edades.

Es importante recordar que los contenidos que se manejan, tanto conceptuales como procedimentales y actitudinales, deben ser significativos para el alumno, es necesario tratar de adaptarlos al entorno de los jóvenes, tomando en cuenta sus intereses, para lograr una mayor motivación hacia la materia, recordando siempre que desde el enfoque constructivista, el maestro es un facilitador que ayudará al joven a tener acceso a la nueva información y a construir su propio conocimiento.

Los alumnos pierden la motivación cuando no entienden un tema, sienten que es una pérdida de tiempo y no le encuentran sentido al estar sentados sin aprender nada, empiezan a aburrirse, se sienten frustrados y desisten en el intento por aprender. Al no tener nada interesante que hacer, tienden a la indisciplina.

Con frecuencia mandamos señales y mensajes sin querer a nuestros alumnos que implican ofensas, malos tratos, agresiones, lo que ocasiona que nuestra comunicación se vea afectada de manera negativa, dichos mensajes evitarán que se sientan en un ambiente cálido y de confianza necesarios para el logro de nuestros objetivos.

Todas estas situaciones, contribuyen en la disminución de la autoestima, los estudiantes con frecuencia se expresan con frases como: no me gusta su materia, no le entiendo, no soy bueno para las matemáticas, soy un burro, siempre he batallado mucho, se limitan, se sienten inseguros, se niegan a trabajar en clase y fuera de ella y adoptan posturas negativas hacia el docente y hacia su clase.

La importancia de que nuestros temas aborden situaciones que estén dentro de sus intereses radica en que de esta forma será más fácil para uno lograr que el aprendizaje sea significativo (puesto que no les verán utilidad) y no se olvide fácilmente con el tiempo. De ahí que nuestros jóvenes estudiantes lleguen deficientes en temas que son básicos para la adquisición de nuevos conocimientos y habilidades.

---

## II.4 OBJETIVOS

La enseñanza de las matemáticas es una labor sumamente difícil, ya que los docentes nos encontramos día a día con diversos factores que afectan dicho proceso y que como consecuencia arrojan resultados no deseables en el aprovechamiento de los contenidos, lo que convierte a esta asignatura en una de las menos “populares” entre nuestros estudiantes.

Elegí este tema de tesis, con el interés de aplicar mis experiencias como docente, así como las obtenidas en la maestría, tratando de **facilitar tanto al docente como al alumno la tarea diaria**, en el entendido de que no se trata de una fórmula “mágica”, sino de **estrategias y ejercicios que tratarán de lograr en el estudiante una mejor comprensión de los temas, así como su aplicación en la vida cotidiana**.

Los objetivos principales de este trabajo son:

- ❖ Elevar el grado de aprovechamiento y disminuir el índice de deserción de los estudiantes, mediante la generación de material didáctico.
- ❖ Mejorar la práctica docente en las asignaturas de Matemáticas III y Matemáticas IV, a nivel bachillerato.
- ❖ Promover la importancia del conocimiento de las Matemáticas en la vida cotidiana.
- ❖ Disminuir la resistencia y predisposición de los estudiantes al aprendizaje de las mismas.
- ❖ Generar material didáctico interdisciplinario, que le permitan al docente desarrollar e implementar estrategias de enseñanza, para una mejor comprensión del contenido temático en sus estudiantes.

---

## II.5 DESCRIPCIÓN DEL PRODUCTO

Se han desarrollado una serie de **estrategias** de enseñanza-aprendizaje, basadas principalmente en el uso de **mapas conceptuales, tablas de valores, diagramas y gráficas que resultan más atractivos a la vista del alumno**, en lugar de solo definiciones y cálculos sin sentido para ellos.

Además se presentan ejercicios propuestos para la aplicación de los aprendizajes obtenidos. Se trata de manejar ejemplos de situaciones con los que el alumno se encuentra familiarizado, de modo que pueda fácilmente identificarlos, relacionarlos con su entorno y sobre todo que pueda llegar a la solución de los mismos.

---

## **III.- FUNDAMENTOS PEDAGÓGICOS Y DISCIPLINARES**

### **III.1 FUNDAMENTO PEDAGÓGICO**

La representación científica es una analogía de la realidad, donde se utilizan una serie de reglas lógicas, que generalmente son una serie de situaciones de causa y efecto, en donde se dispone de diversas herramientas para representar aspectos de la realidad, **la ciencia procede de una porción de la realidad que se considera teóricamente relevante.**

Estas representaciones se consideran instrumentos utilizados para lograr conseguir conocimientos significativos del contenido estudiado, además de transferencias a otros campos de estudio.

**Aprender ciencias requiere reconstruir el enfoque de los contenidos científicos por medio de una imagen adecuada para ser llevados al aula.** Frecuentemente se utilizan modelos científicos simplificados que no tienen significado para el alumno. De esta manera los alumnos incorporan memorísticamente el contenido y les resulta muy poco significativo.

Si el contenido es poco significativo los alumnos le darán la significación más conveniente de acuerdo con su sentido común y personal, es decir, acomodarlos en sus propios modelos previos, es así como muchos aprendizajes podrán ser erróneos, construyendo un obstáculo para acceder al conocimiento científico validado.

El crear una analogía es apelar a conceptos de significación ya conocida por los alumnos, estos contenidos desde su pensamiento operatorio concreto (término de la teoría piagetiana) y mediante estrategias apropiadas ellos pueden desarrollar un pensamiento operatorio sobre dichos contenidos análogos.

**El constructivismo considera el razonamiento análogo como la llave que permite el acceso a los procesos de aprendizaje,** todo conocimiento incluirá una búsqueda de aspectos similares entre los conocimientos previos y los nuevos, lo cual facilita la comprensión y visualización de conceptos abstractos y despertando el interés por los temas nuevos.

Generalmente son los profesores los que crean la analogía porque conocen el tema, pretenden transmitir sus propiedades relevantes, aplicaciones y limitaciones. Un estudiante pasivo puede llegar a percibirla como información facilitadora de la comprensión del tema pero frecuentemente reclama que es complicada.

Una vez trabajada la situación análoga desde el conocimiento de los alumnos se presenta la información científica con un lenguaje adaptado al nivel de escolaridad, el trabajo de los alumnos consiste en la elaboración de nuevas hipótesis, encontrar similitudes y diferencias con el caso análogo y el científico.

Por último, el momento de la metacognición o autogestión del aprendizaje es decir cuando el estudiante toma conciencia de lo aprendido en el tema en esta etapa el tipo de pensamiento es un nivel de alta conceptualización y de revisión de los mecanismos para la adquisición del conocimiento.

La utilización de diferentes tipos de representaciones del conocimiento tiende a favorecer la visualización de conceptos abstractos.

Las representaciones analógicas pueden ser utilizadas en diversas formas con variados niveles de efectividad en el aprendizaje.

Las estrategias, modelos y vocabulario son interacciones sociales que facilitan el alcance de nuevos aprendizajes significativos así como lo aprendido y las estrategias cognitivas empleadas ( Vigotsky 1993 ).

**La educación basada en competencias utiliza recursos que simulan circunstancias o ejemplos de la vida real**, así como análisis y resolución de problemas, utilizando el trabajo cooperativo el cual es reforzado por tutorías individuales.

Al finalizar cada etapa del proceso educativo se observan y evalúan las competencias que cada uno de los estudiantes ha construido, así podemos especificar lo capacitado que está el alumno al finalizar la etapa.

La combinación de las competencias genéricas y atributos básicos son esenciales para poder participar en esta nueva era donde es necesario crear aprendizajes significativos en el área de las ciencias así lograr un buen desempeño laboral.

Se sugiere el uso de mapas conceptuales o redes semánticas, que son recursos confiables para la representación y gestión del conocimiento orientadas a las actividades didácticas.

**El objetivo es facilitar el aprendizaje de los estudiantes favoreciendo la construcción del conocimiento nuevo sobre el previo.**

El estudiante es el principal beneficiario del uso de estas estrategias, contribuyendo al logro de objetivos didácticos y formativos, desplazando la responsabilidad del aprendizaje hacia el estudiante.

En esta era de crecimiento exponencial de la información y de la necesidad de lograr un aprendizaje significativo para los estudiantes, es necesario que los docentes faciliten el aprendizaje de los temas a estudiar contenidos en los programas establecidos por la Secretaría de Educación Pública.

Los mapas conceptuales ocupan un lugar destacado, utilizados desde los niveles básicos hasta los niveles superiores y la investigación, son derivados de la Teoría del aprendizaje significativo de Ausubel.

Son un recurso didáctico que facilita el aprendizaje de los estudiantes, utilizando una construcción motivada, consciente del conocimiento sobre el conocimiento previo.

Los mapas conceptuales estimulan el aprendizaje significativo, ya que al establecer relaciones entre conceptos y ejemplos de los mismos, los estudiantes al ir analizándolos, van generando sus propias relaciones conceptuales.

Los mapas conceptuales se pueden utilizar con varios fines:

- ***En la enseñanza de argumentos:***  
Donde se pueden aclarar dudas acerca de aquellos conceptos que representan mayor dificultad para los estudiantes y puntualizar de una manera práctica los conceptos clave, así como facilitar la comprensión en las relaciones que existen entre dichos conceptos. Los mapas conceptuales le permiten al maestro presentar un panorama general de lo que quiere enseñar. La forma en que se construya y se presente el mapa influirá definitivamente sobre el interés y la motivación de los estudiantes.
- ***Como refuerzo para el aprendizaje:***  
Son útiles para retroalimentar o reforzar un tema ya estudiado así como para hacer una valoración de nuevos aprendizajes.  
Al utilizar mapas conceptuales en clase, se está haciendo uso de medios visuales y verbales, lo que permite que se cubran diferentes estilos de aprendizaje y por consecuencia, una mejora en la comprensión de conceptos y las relaciones entre ellos, llevando al alumno a la utilización de diversas funciones tales como el análisis y la búsqueda.
- ***En la organización y programación de cursos:***  
Los mapas conceptuales también son una herramienta muy útil para organizar los contenidos de algún curso.
- ***Como control del aprendizaje e identificador de conceptos mal aprendidos:***  
Los mapas conceptuales ayudan en la precisión de conceptos y sus relaciones, de esta manera es menos probable que algún concepto sea malinterpretado.

También pueden ser una herramienta útil para evaluar el aprendizaje de los estudiantes, una vez que éstos elaboren un mapa conceptual, lo que le permitirá al docente darse cuenta del nivel de cumplimiento de los objetivos didácticos y a la vez, detectar aquéllos conocimientos que no han sido alcanzados o que han sido comprendidos de manera errónea.

Para **lograr un aprendizaje real**, que se lleve a cabo de manera constante es necesario **que el alumno tenga una actitud positiva y sobre todo que esté motivado**. Con una buena motivación y mediante la aplicación de diversas estrategias, métodos y técnicas de enseñanza-aprendizaje, **el joven podrá de una manera más fácil apropiarse del conocimiento**.

**Los mapas conceptuales son llamativos para los alumnos**, lo que de alguna manera influirá en ellos aumentando el nivel de motivación.

La autoestima en los jóvenes es muy importante; una baja autoestima generalmente se relacionará con una mala actitud y un bajo rendimiento escolar. En cambio, una autoestima alta se relacionará con buenas actitudes, conductas, relaciones interpersonales y buenos rendimientos escolares.

Los intereses de los adolescentes y la motivación están relacionados fuertemente, ya que en general una persona desmotivada será una persona que no trabajará o no pondrá empeño suficiente para lograr sus objetivos, pues, simplemente no le interesa o no le representa mayor importancia, en cambio, una persona motivada trabajará con mayor empeño para lograr esas metas que se ha propuesto. Es difícil conocer los intereses de cada uno de nuestros jóvenes estudiantes, ya que encontraremos una amplia variedad entre ellos, debido a las diferencias tanto de sexo, culturales, geográficas, y algunas otras relacionadas con el medio que los rodea.

Una buena referencia acerca de los intereses de los adolescentes<sup>(1)</sup> podrían ser las actividades que éstos desarrollan a diario y cuyos objetivos están orientados principalmente a:

- Sus relaciones interpersonales tanto con iguales como con el sexo opuesto.
- El papel que desempeñan ante la sociedad.
- La aceptación de su físico y la manera de utilizarlo.
- Su independencia tanto emocional como económica.
- La búsqueda de la seguridad.
- La elección de una carrera u ocupación.
- Su vida en pareja.
- Su vida cívica.
- Su conducta social.
- Sus valores.

<sup>(1)</sup> Havighurst en 1953 enumeró las 10 tareas principales a desarrollar por el adolescente.

Los intereses de los adolescentes están muy influidos por el medio que los rodea. Continuamente están descubriendo su mundo, que es diferente al de los demás y al cual deben adaptarse lo mejor que pueden. Se presenta ante nosotros una amplia gama de preferencias como el uso del celular, la computadora (internet), la música, deportes, baile, etc., que podrían ser utilizados con fines didácticos, aprovechando precisamente las preferencias de los jóvenes en su uso.

Creo que nuestro sistema educativo aún no logra promover el trabajo a partir de los intereses de los adolescentes. Aunque existen algunos intentos aislados (por ejemplo, el mundo de los materiales, que intenta despertar el interés de los jóvenes, mediante actividades que les permiten desarrollar sus conocimientos y ser ellos mismos, dejando que lleguen a conclusiones propias por medio de ejemplos interesantes, sencillos y relacionados con su vida cotidiana).

Si bien es cierto que es importante captar la atención de nuestros alumnos con temas que sean de su interés, también es un reto el poder mantener dicha atención en la clase, para lo cual se debe tener una buena planeación, en la que el alumno sea parte activa, donde no solo recibe la información, sino que la pone en práctica y resuelve problemas.

Si analizamos los programas, nos daremos cuenta que las actividades que se proponen no tienen mucho que ver con los intereses de los jóvenes (por ejemplo en matemáticas: Establecer el concepto de lugar geométrico a partir del estudio de las relaciones entre las coordenadas de los puntos, proponer ejercicios de análisis de posibles intersecciones y simetrías en las gráficas de lugares geométricos, proponer problemas de modelación algebraica).

En lugar de promover el trabajo a partir de los intereses de los adolescentes, lo hacemos más difícil, ya que en lugar de utilizarlos en nuestro favor con fines didácticos, los prohibimos, como por ejemplo, el uso del celular, escuchar música en el laboratorio durante una práctica, etc.

Aunado a esto, actualmente existe un creciente problema de sobrecarga de información relevante y poco tiempo disponible para verificarla, estudiarla y aprenderla.

El conocimiento es una aplicación de datos e información en el entorno en el cual se desarrolla el estudiante, es una propiedad individual y nunca es totalmente compartido solo parcialmente. El estado de nuestro conocimiento es cambiante, fluido y está incesantemente en evolución.

La memorización de la información que se almacena puede ser útil para pasar un examen pero impide la correcta integración que permita utilizar el conocimiento de forma práctica en el contexto de la vida.

---

## III.2 FUNDAMENTOS DISCIPLINARES

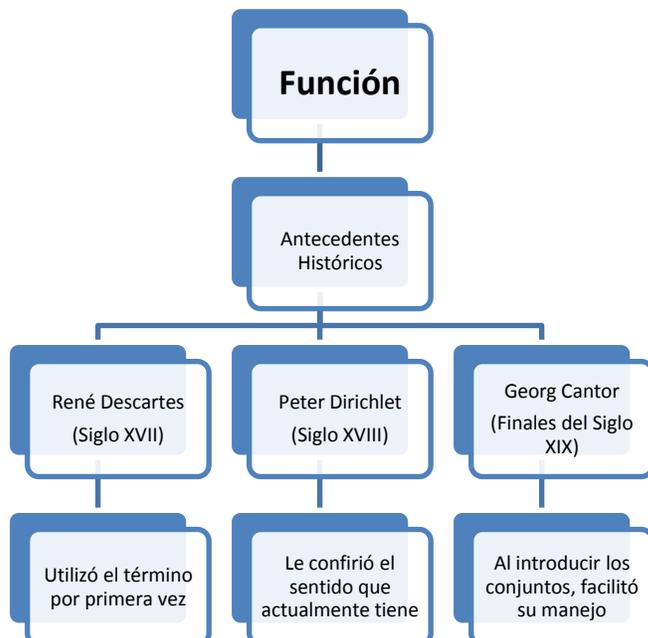
La manera en la que presentamos a nuestros alumnos los contenidos, a menudo resultan muy poco familiares a su lenguaje, sobre todo en el área de las matemáticas, donde manejamos términos como Expresión Algebraica, Teorema, Leyes, Modelos Matemáticos, Función, Relación, Curvas, Conjuntos, Dominio, Rango, etc.

**En este trabajo se pretende mejorar o facilitar el aprendizaje de funciones mediante el uso de herramientas visuales como los mapas conceptuales, mapas mentales, tablas comparativas, diagramas de flujo, etc.**

Dentro de los conocimientos previos necesarios para que el alumno pueda comprender más fácilmente los temas que se mencionarán están:

- 1.- Operaciones aritméticas.
- 2.- Conjuntos (Números reales, números complejos, números racionales, números naturales).
- 3.- Productos notables.
- 4.- Factorización.
- 5.- Solución de ecuaciones de primer y segundo grado.
- 6.- Línea recta y Parábola (Ecuaciones y gráficas).

La importancia de las funciones radica en su aplicación ya que están presentes en todo momento de nuestras vidas, desde la explicación a muchos fenómenos físicos y químicos, hasta el comportamiento en las ventas de un producto, el gasto de gasolina de un auto en relación con su velocidad o la distancia recorrida, el crecimiento bacteriano, el interés ganado en una cuenta bancaria en determinado periodo, etc.

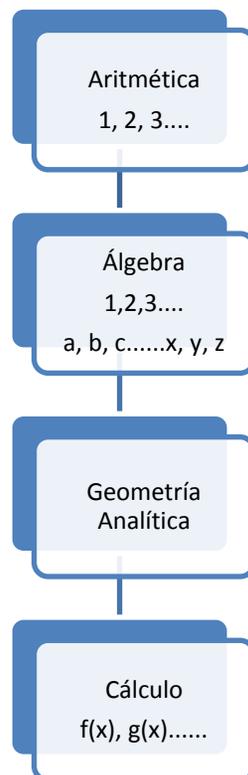


René Descartes, matemático francés, utilizó el término función por primera vez en el año de 1637 para designar una potencia  $x^n$  de la variable  $x$ .

Posteriormente, el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz lo utilizó en el año de 1694, al referirse a varios aspectos de una curva, como su pendiente.

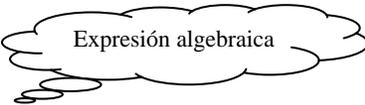
En tiempos más recientes, el matemático alemán, Peter Dirichlet (1805-1859) definió a una variable como un símbolo que representa un número dentro de un conjunto de ellos.

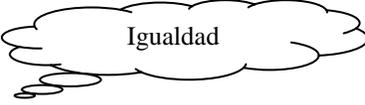
Y más recientemente, el matemático alemán **Georg Cantor** (1845 - 1918) basado en su teoría de conjuntos amplió y facilitó el manejo de funciones, sobre todo en relación a la continuidad de las mismas.

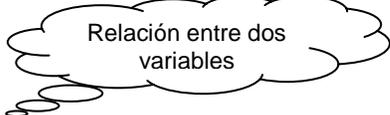


Es importante que al inicio, se establezcan los antecedentes de lo que se conoce como pre-cálculo de funciones, el alumno ubicará el pre-cálculo en el diagrama y de esta manera podrá darse cuenta de los conocimientos previos necesarios para la clase.

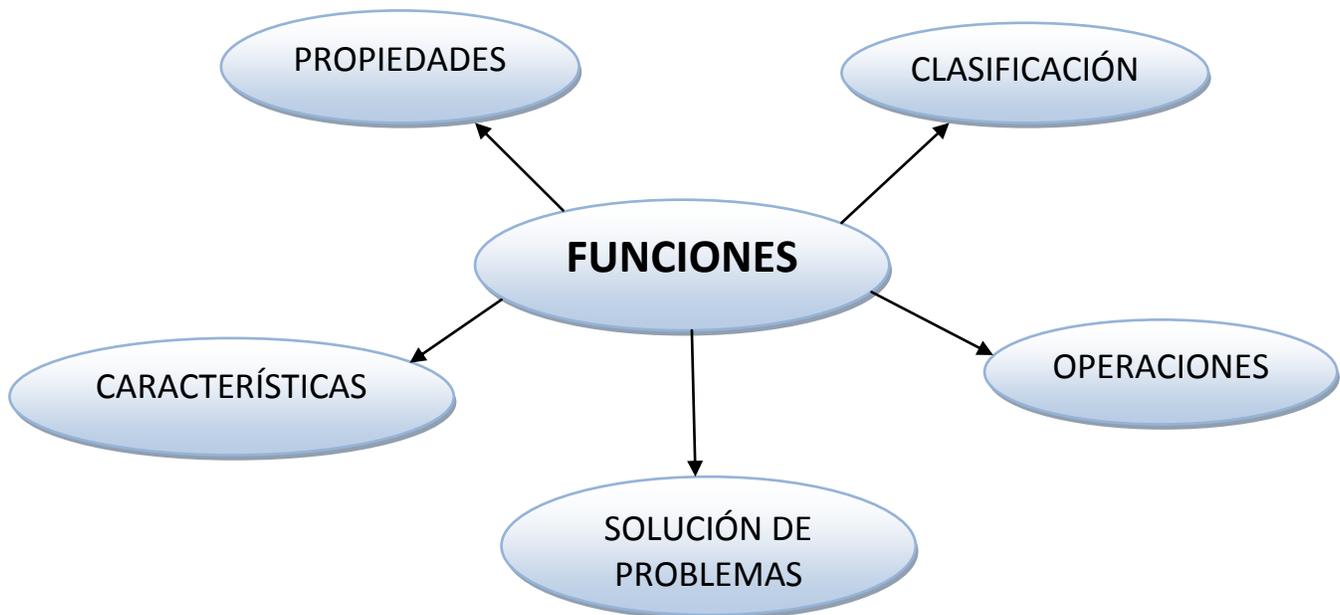
Además, establecer las diferencias entre lo que el estudiante conoce como una expresión algebraica (como un polinomio), una ecuación y una función, le permitirá diferenciar e identificar las características de cada uno de ellos.

Polinomio:  $5x^3 + 3x^2 + 1$  

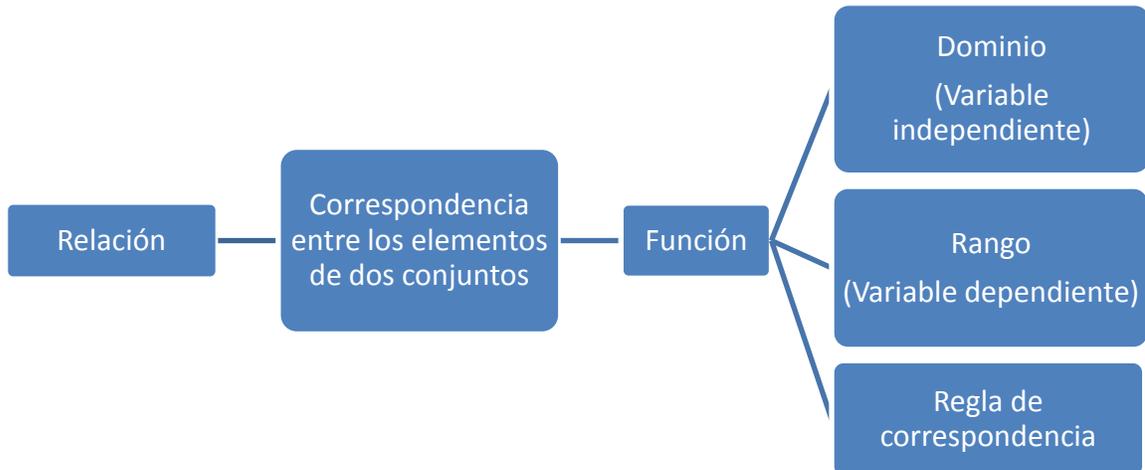
Ecuación Polinomial:  $5x^3 + 3x^2 + 1 = 0$  

Función Polinomial:  $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + 1$  

Es importante también que se establezca lo que se abarcará en el estudio de las funciones, es decir la temática, que estará directamente relacionada con el programa de la asignatura. Ya anteriormente se mencionó que los mapas nos pueden servir también para organizar los contenidos de un curso.



Para el estudio de funciones, es necesario definir el concepto de relación y de función. Mediante el siguiente mapa, será más fácil para el maestro mostrar al alumno dichos conceptos y dejar claro que: “No todas las relaciones son funciones pero todas las funciones son relaciones”.



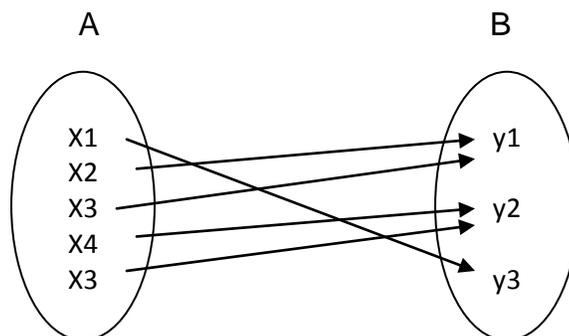
Una relación se puede representar por medio de pares ordenados, una ecuación, una gráfica o una regla.

Una **función** es una relación, es una regla de correspondencia entre dos variables.

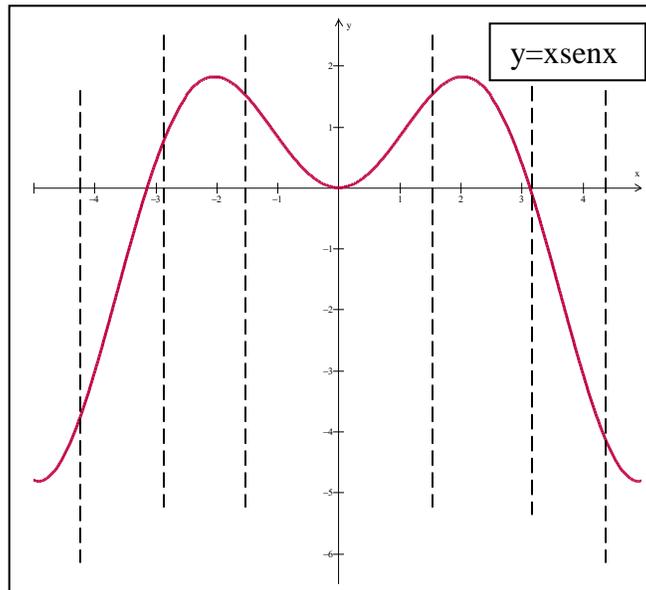
Una relación es también una función si:

- **A un mismo valor de “y” se le pueden asignar diferentes valores de “x”, pero al mismo valor de “x” no se le pueden asignar diferentes valores de “y”.**

Ejemplo:



- **Cumple con la Regla de la Vertical.**



La regla de la vertical consiste en trazar varias rectas verticales a lo largo de la gráfica de la función. Para que sea una función cada recta debe tocar solo en un punto a la gráfica, es decir solo un valor de y para cada x.

## NOTACIÓN DE FUNCIONES

Una función se representa en la forma:

$$y = f(x)$$

Y se lee: “y es igual a f de x”, lo que significa que “y” es función de “x”, es decir, que el valor de “y” dependerá del valor de “x”.

La expresión:  $f(a)$  se lee “f de a”; donde “a” es el valor que toma “x” en la función, es decir,  $f(a)$  es el valor que toma la función (variable dependiente) cuando “x” (la variable independiente) toma el valor de “a”.

Por ejemplo:

$$\text{Si } f(x) = 3x + 2$$

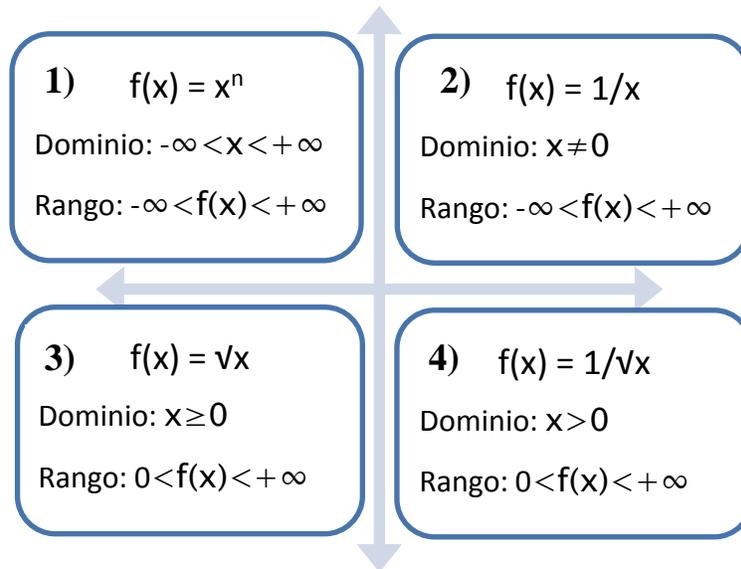
$$f(a) = 3a + 2$$

$$f(2) = 3(2) + 2 = 6 + 2 = 8$$

$$f(-2) = 3(-2) + 2 = -6 + 2 = -4$$

## DOMINIO Y RANGO

Uno de los más grandes retos para el maestro que enseña pre-cálculo de funciones es precisamente el concepto de dominio y rango de una función, pues esta clase de contenido frecuentemente se presenta a los alumnos en funciones que no tienen sentido para ellos. Se presenta un cuadro en el cual se trata de abarcar las diversas formas en las que se puede presentar una función:



Ejemplos para encontrar el dominio de las funciones:

- 1)  $f(x) = \sqrt{x+3}$  La función es parecida a la número 3, donde existe un radical par; en este caso, los números negativos no tienen raíces pares, por lo tanto, todo lo que se encuentre dentro del radical deberá ser mayor o igual a cero, pero no menor.

Entonces:  $x+3 \geq 0$

Haciendo el despeje:

**Dominio:**  $x \geq -3$  o bien:  $-3 \leq x < +\infty$

2)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-5}}$

La función es parecida a la número 4, en donde existe un radical par y además éste radical se encuentra como denominador; en este caso, además de que los números negativos no tienen raíces pares, no es posible la división entre cero por lo tanto, todo lo que se encuentre dentro del radical deberá ser mayor a cero, pero no igual ni menor que éste.

Entonces:  $x-5 > 0$

Haciendo el despeje:

**Dominio:**  $x > 5$  o bien:  $5 < x < +\infty$

3)  $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

La función es parecida a la número 2, en donde existe un cociente de dos polinomios, en este caso, el numerador no representa ningún problema, pero como no es posible la división entre cero, entonces el denominador no puede ser cero.

Entonces:  $x^2-4 \neq 0$

Si factorizamos tenemos que:

$$(x+2)(x-2) \neq 0$$

Haciendo cada uno de los términos diferentes a cero:

$$x+2 \neq 0 \quad \text{y} \quad x-2 \neq 0$$

Haciendo los despejes:

**Dominio:**  $x \neq -2$     **y**     $x \neq 2$

4)  $f(x) = x^2 + 1$

La función es parecida a la número 1, en donde la variable x puede tomar cualquier valor sin restricción alguna. Por lo tanto el dominio de la función será:

$-\infty < x < +\infty$     Es decir, el conjunto de todos los números reales.

## CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

Existen diversas formas de clasificar una función:

✓ **Por la forma de su gráfica**, se pueden clasificar en:

- Crecientes.- Es aquella en la que aumenta el valor de la variable dependiente al aumentar el valor de la variable independiente, (se puede observar fácilmente en el comportamiento de la gráfica de izquierda a derecha).

- Decrecientes.- Es aquella que disminuye el valor de la variable dependiente mientras aumenta el valor de la variable independiente.

- Continuas.- Es aquella que no presenta “saltos”, cortes o separación entre los puntos que forman la gráfica.

- Discontinuas.- Aquella en la que se observa la gráfica entrecortada, con separaciones, dividida en diferentes intervalos.

✓ **Por las operaciones** que se presentan en la función:

- Algebraicas

a) *Polinomiales*.- Son expresiones matemáticas que están formadas por dos o más términos. Se representan en la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

b) *Racionales*.- Son aquéllas que se expresan como el cociente de dos polinomios, tienen la forma  $r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

- Trascendentes

a) *Exponenciales*.- Son aquéllas funciones de la forma  $f(x) = a^x$ , donde la base de la función es cualquier número real positivo y el dominio (valores de  $x$ ) es el conjunto de los números reales.

b) *Logarítmicas*.- Son las funciones de la forma  $f(x) = \log_a x$ , donde  $a$  es cualquier número real positivo y diferente a 1.

c) *Trigonométricas*.- Se definen como expresiones que dependen de la medida de un ángulo. Otra definición las considera como relaciones angulares que se obtienen con los lados de un triángulo y cuya importancia radica en la aplicación que tienen en astronomía, cartografía, telecomunicaciones, fenómenos periódicos, etc.

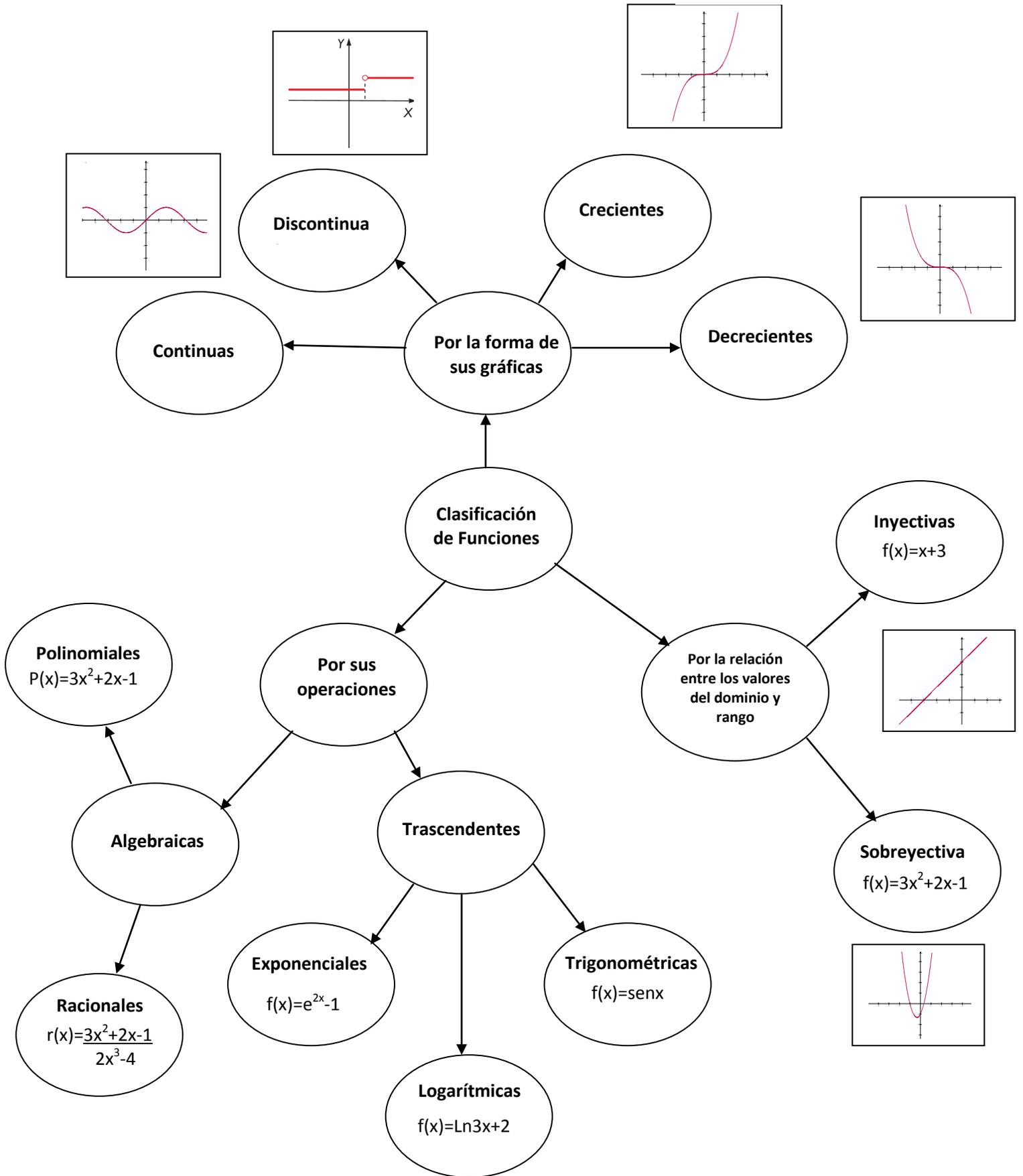
Ejemplos:  $f(x) = \text{sen } x$   $f(x) = 4\cos 3x$

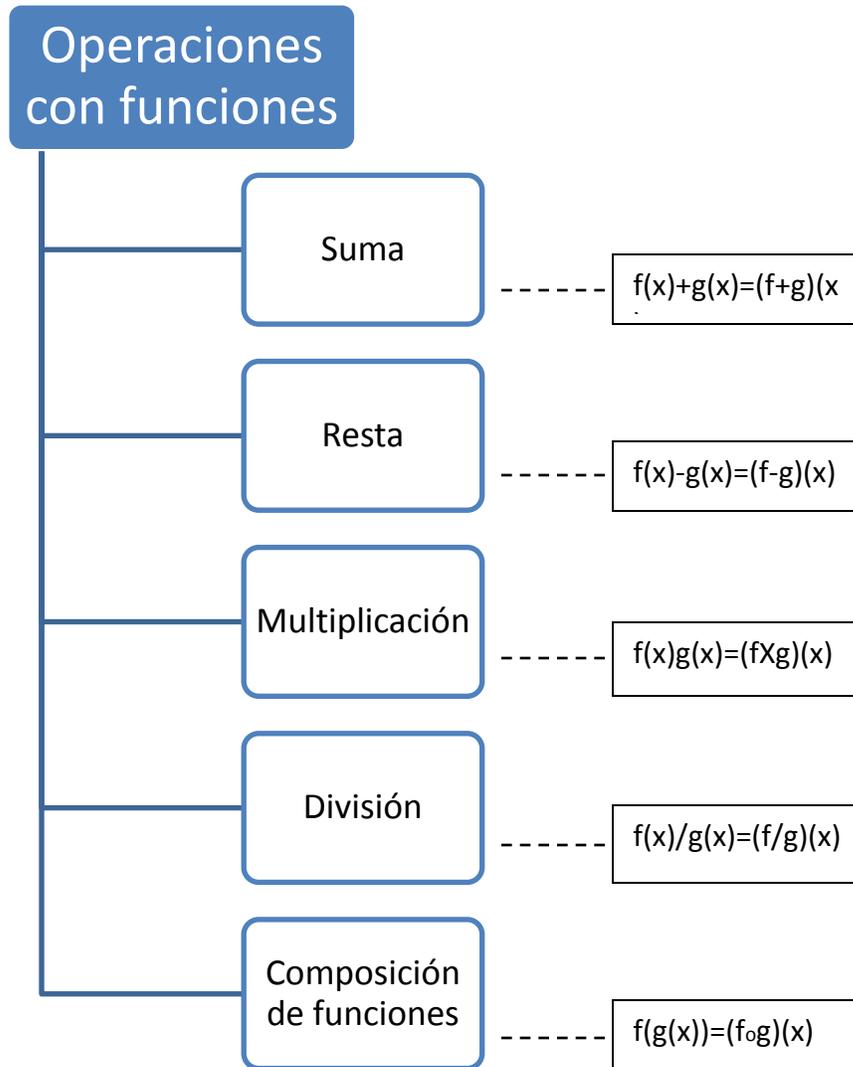
✓ **Por la relación entre los valores del dominio y rango:**

- Inyectivas.- También conocidas como funciones uno a uno y son aquéllas en las que al trazar rectas horizontales en cualquier parte de la gráfica de la función, la recta solo la toca en un punto. Esto es, que para cada valor de  $x$  existe un solo valor de  $y$ .

- Sobreyectivas.- Son aquéllas en las que al trazar rectas horizontales en cualquier parte de la gráfica de la función, ésta se corta en más de un punto (por ejemplo, una parábola con eje focal vertical).

- Biyectivas.- Son aquéllas que son inyectivas y sobreyectivas a la vez. (Por ejemplo, en el caso de la parábola, si tomamos como dominio solo del vértice hacia uno de los lados, la función será inyectiva, pero si tomamos la parábola completa, será sobreyectiva).





**Por ejemplo:**

Si  $f(x)=3x^2+1$  y  $g(x)=4x$

x	f(x)	g(x)	(f+g)(x)	(f-g)(x)	(fXg)(x)	(f/g)(x)	(fog)(x)	(gof)(x)
x	$3x^2+1$	$4x$	$3x^2+4x+1$	$3x^2-4x+1$	$12x^3+4x$	$(3x^2+1)/4x$	$48x^2+1$	$12x^2+4$
2	13	8	21	5	104	13/8	193	52
-2	13	-8	5	21	-104	-13/8	193	52

Las funciones se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir de manera algebraica, además se puede componer una nueva función a partir de la aplicación de dos de ellas considerando un orden establecido.

Se recomienda el uso de tablas de datos para una mayor facilidad en la organización y el manejo de los mismos.

En el ejemplo:

$$f(x) + g(x) = (f+g)(x) = 3x^2+1+4x = 3x^2+4x+1$$

$$f(x) - g(x) = (f-g)(x) = 3x^2+1-4x = 3x^2-4x+1$$

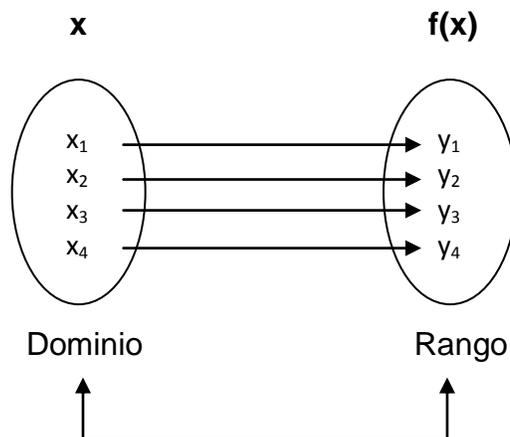
$$f(x) \times g(x) = (f \times g)(x) = (3x^2+1)(4x) = 12x^3+4x$$

$$f(x)/g(x) = (f/g)(x) = (3x^2+1)/4x$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x) = 3(4x)^2+1 = 48x^2+1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2+1) = 4(3x^2+1) = 12x^2+4$$

### FUNCIÓN INVERSA:



Si:

$$f(x) \{ (1,2), (2,4), (3,6) \}$$

$$g(x) \{ (2,1), (4,2), (6,3) \}$$

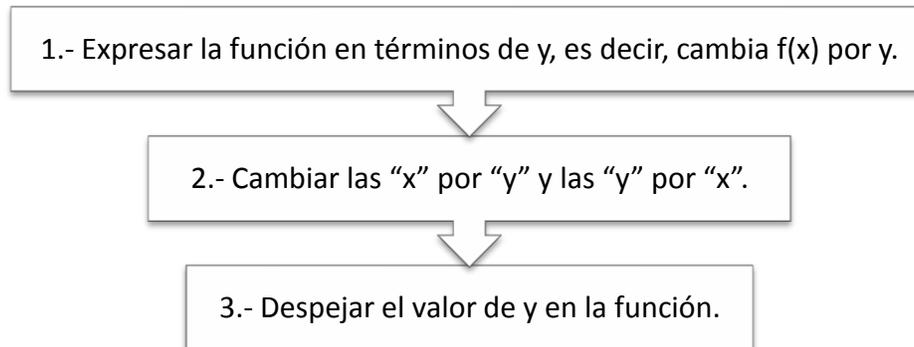
Dominio: 1,2,3

Dominio: 2,4,6

Rango: 2,4,6

Rango: 1,2,3

Se puede encontrar la función inversa de una función siguiendo tres pasos muy sencillos:



Por ejemplo, en la función anterior:  $f(x)=3x^2+1$

**PRIMERO:**

$$y = 3x^2 + 1$$

**SEGUNDO:**

$$x = 3y^2 + 1$$

**TERCERO:**

$$x-1=3y^2$$

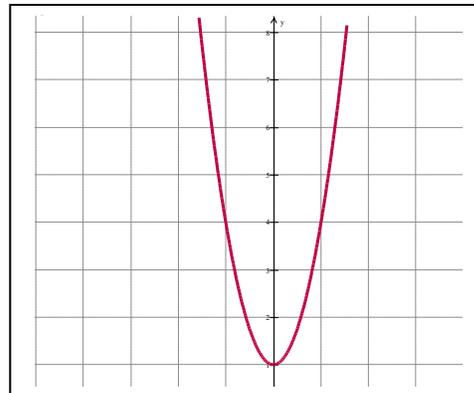
$$y^2 = \frac{x-1}{3}$$

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{3}}$$

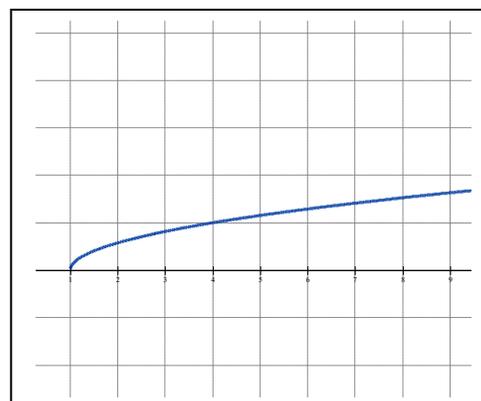
**La función inversa es:**

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-1}{3}}$$

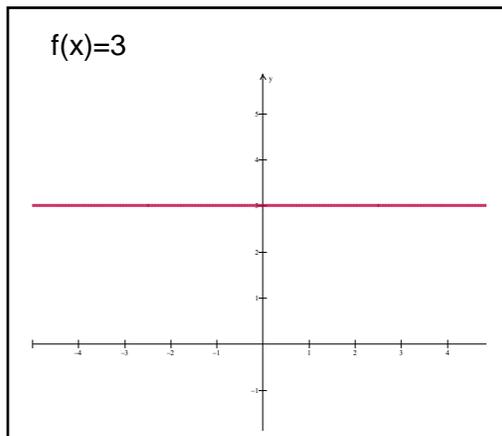
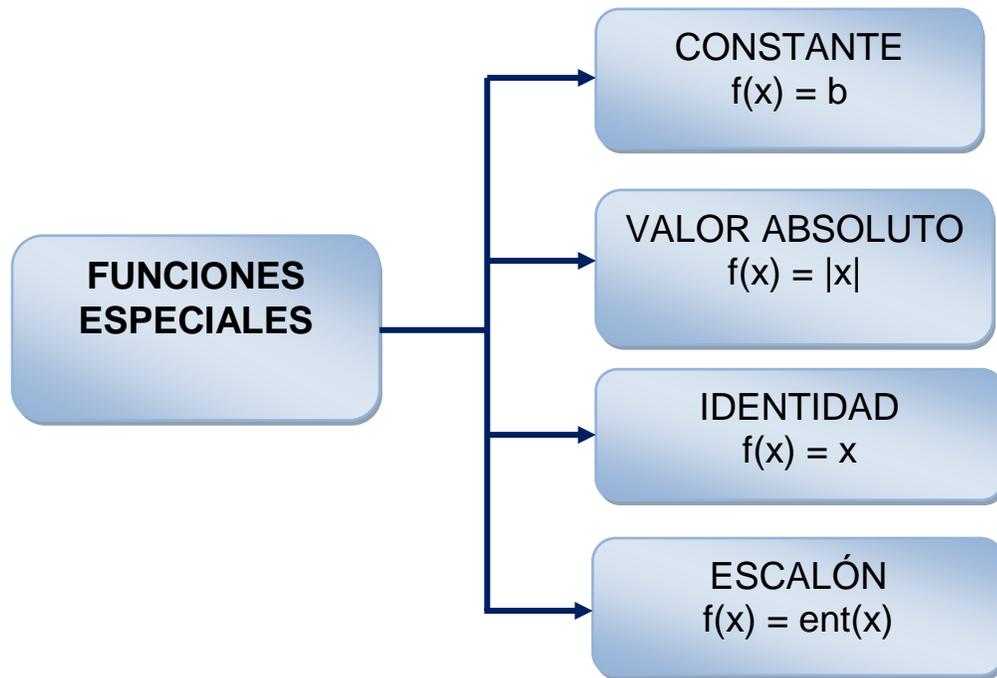
En la gráfica de la función inversa se observa sólo una parte, ya que está limitada por el dominio de la función.



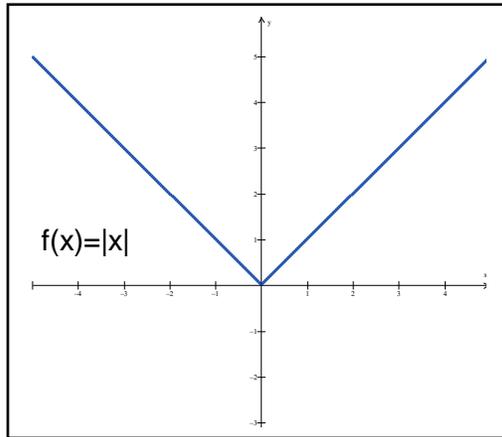
La gráfica de la función inversa será como si se reflejara la función original en un espejo de 45°.



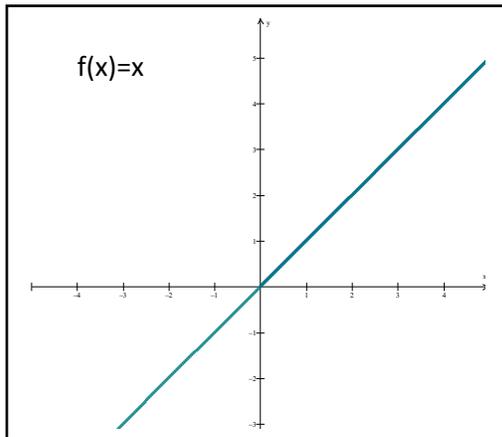
Además de la clasificación antes mencionada, están las funciones especiales, que se presentan en procesos característicos y diferentes al resto de las funciones.



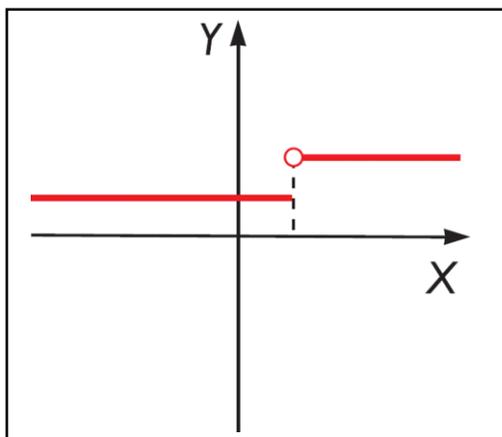
**FUNCIÓN CONSTANTE.-** Se trata de una función lineal especial, en la cual para todo valor de  $x$  el valor de  $y$  se mantiene igual, es decir que aunque el valor de  $x$  se modifique, el de  $y$  permanece sin cambio alguno.



**FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO.-** Es aquella que para cualquier valor de  $x$ , ya sea positivo o negativo, existe un valor de  $y$  positivo.



**FUNCIÓN IDENTIDAD.-** También son una clase de funciones lineales especiales, es una recta que pasa por el origen a  $45^\circ$ , donde el valor de  $y$  es igual a  $x$ .

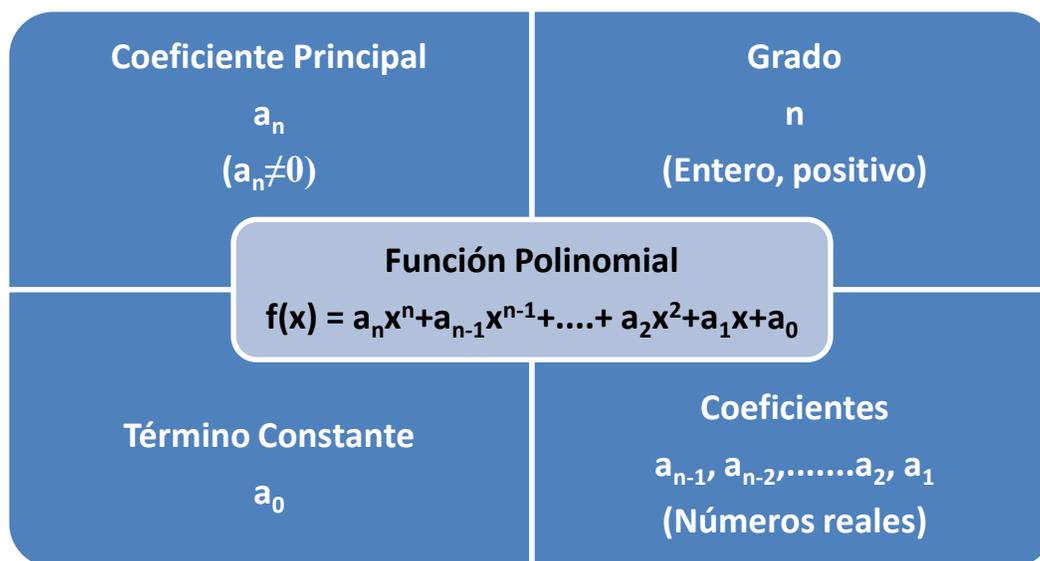


**FUNCIÓN ESCALÓN.-** También conocida como función máximo entero. Se presenta en procesos especiales, en los cuales el valor de  $x$  solo toma valores enteros.

Otra forma de clasificar a las funciones un poco más específica comparada con la anterior clasificación:



## FUNCIÓN POLINOMIAL



En el diagrama anterior se muestra la forma general de una función polinomial y cada una de las partes que la forman, como los coeficientes, las variables, el grado de la función y su término constante.

Las funciones se pueden presentar en forma de polinomios, como es el caso de la función lineal, que en geometría analítica no es más que un polinomio de primer grado cuya gráfica es una línea recta y la función cuadrática, un polinomio de segundo grado que representa a una parábola.

### Geometría Analítica

### Cálculo

Línea Recta	→	Función Lineal
Parábola	→	Función Cuadrática

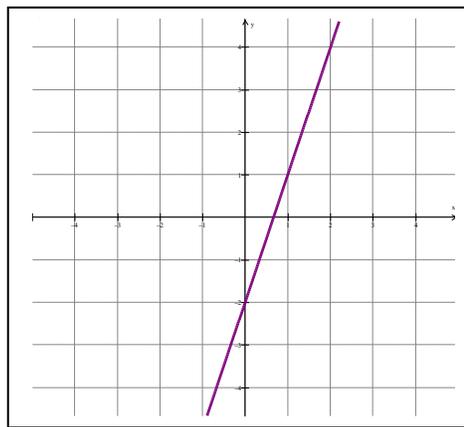
## FUNCIÓN LINEAL

Son funciones cuya gráfica es una línea recta. Los modelos lineales son polinomios de primer grado de la forma:

$$f(x) = mx + b$$

Donde  $m$  es la pendiente de la recta y  $b$  es la ordenada en el origen o punto de intersección con el eje  $y$ .

Ejemplo: En la gráfica de la función  $f(x) = 3x - 2$ , se observa la pendiente de la recta ( $m=3$ ) que es positiva y por cada 3 unidades que se avanza en  $y$ , se avanza 1 en  $x$ ; además se puede apreciar claramente el punto de intersección con el eje  $y$   $(0,-2)$

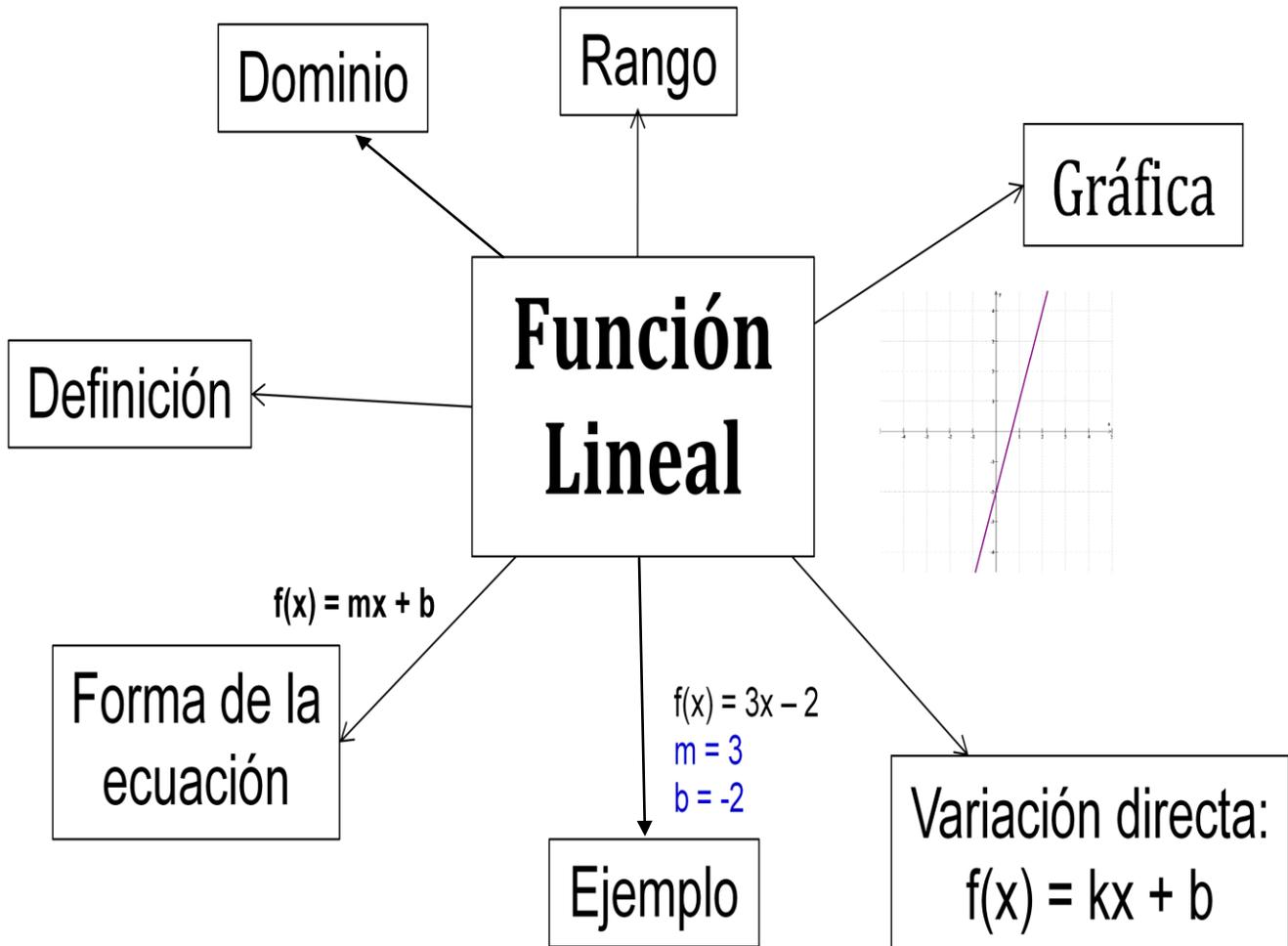


x	y
-1	-5
0	-2
1	1
2	4

En este tipo de función se presenta una variación directa de  $y$  con respecto a  $x$ , cuando  $b$  es cero, quedando la función expresada como  $y = mx$ , es decir, si aumenta  $x$  aumentará  $y$ , pero si disminuye  $x$ ,  $y$  también disminuirá. En una función con esta forma, la constante de variación directa es precisamente la pendiente de la recta.

$$f(x) = kx + b$$

Una vez que se conoce el modelo matemático lineal, es muy sencillo encontrar el dominio y rango del mismo, así como construir su gráfica. Sólo basta con asignar valores arbitrarios a  $x$  que se encuentren dentro del dominio de la función y sustituir cada uno de ellos en el modelo matemático para encontrar el par ordenado que le corresponde a cada punto, como se muestra en la tabla de valores al lado de la gráfica.



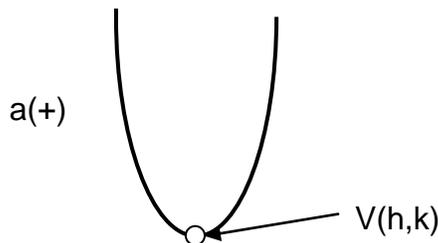
## FUNCIÓN CUADRÁTICA

Las funciones cuadráticas son de la forma:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son coeficientes constantes.

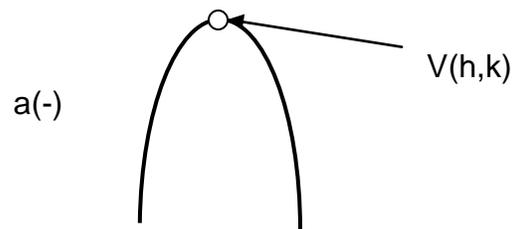
La gráfica de una función cuadrática es una parábola que abre hacia arriba, si el valor de  $a$  es positivo y hacia abajo si  $a$  es negativa.

El dominio de una función cuadrática es el conjunto de los números reales, mientras que el rango, contradominio o codominio, depende de hacia dónde abre la parábola, así como de la ubicación del vértice.

Recordemos que el vértice es el punto máximo o mínimo de una parábola:



Si la parábola abre hacia arriba, el vértice será un mínimo.



Si la parábola abre hacia abajo, el vértice será un máximo.

## GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Para graficar una función cuadrática son necesarios 3 puntos como mínimo:

- 1.- Los puntos de intersección con el eje  $x$ , factorizando la función por medio de cualquier método ya conocido.
- 2.- El punto de intersección con el eje  $y$ , dando un valor de cero a la  $x$  y sustituyéndolo en la función.
- 3.- Las coordenadas del vértice, que se obtienen llevando la función a la forma estándar de la parábola, completando el Trinomio Cuadrado Perfecto.

Por ejemplo: Para la función

$$f(x) = 2x^2 + x - 1$$

1.- Puntos de intersección con el eje x (y=0)

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

Aplicando la fórmula general:

$$a = 2 \quad b = 1 \quad c = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$x = \frac{-1 + 3}{4} = -1/2$$

$$x = \frac{-1 - 3}{4} = -1$$

2.- Punto de intersección con el eje y (x=0)

$$f(x) = 2x^2 + x - 1$$

$$f(x) = 2(0)^2 + 0 - 1$$

$$f(x) = -1$$

3.- Coordenadas del vértice:

$$y = 2x^2 + x - 1$$

$$y = 2(x^2 + \frac{1}{2}x + \underline{\quad}) - 1$$

$$y = 2(x^2 + \frac{1}{2}x + 1/16) - 1 - 2/16$$

$$y = 2(x + \frac{1}{4})^2 - 9/8$$

$$\frac{1}{2}(y + 9/8) = (x + \frac{1}{4})^2$$

**Forma estándar de la ecuación de la parábola con eje focal vertical:**

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

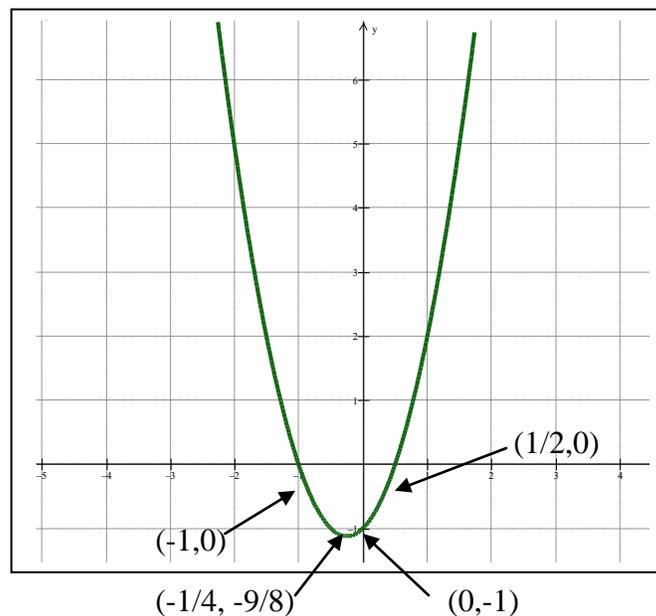
Aplicando la propiedad de simetría de las igualdades:

$$(x + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{2}(y + 9/8)$$

**Coordenadas del vértice: V(h,k)**

De la ecuación:  $h = -1/4$  y  $k = -9/8$

Por lo tanto:  $V(-1/4, -9/8)$



## POLINOMIOS DE GRADO 3 O MÁS

### RAÍCES DE UNA FUNCIÓN

Las raíces o ceros de una función son los puntos de intersección con el eje x de su gráfica.

#### NÚMERO DE CEROS REALES POSITIVOS Y NEGATIVOS (REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES)

Los ceros reales de una función pueden ser valores de x positivos o negativos y la Regla de los signos de Descartes nos puede auxiliar para saber la cantidad de ceros reales que tiene una función.

Recordemos que el grado de la función es igual al número de factores de un polinomio, solo que estos factores pueden ser reales o complejos.

Sea  $P(x)$  un polinomio con coeficientes reales, entonces:

a) El número de ceros reales positivos de  $P(x)$  es igual al número de variaciones en el signo en  $P(x)$  o es menor que éste en un número entero par.

b) El número de ceros reales negativos de  $P(x)$  es igual al número de variaciones en el signo en  $P(-x)$  o es menor que éste en un número entero par.

Por ejemplo, para el polinomio  $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6$

Ceros reales positivos:  $\underbrace{x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6}$       3 cambios de signo, 3 ceros reales (+)

Ceros reales negativos:  $\underbrace{(-x)^4 - (-x)^3 + (-x)^2 - 3(-x) - 6}$   
 $x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 6$       1 cambios de signo, 1 ceros reales (-)

Ceros reales totales: 4

Sea  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

CEROS REALES       $\frac{p}{q} = \frac{\text{factores de } a_0}{\text{factores de } a_n}$        $\left\{ \begin{array}{l} \text{Se prueban con} \\ \text{división sintética} \end{array} \right.$

**La utilidad de conocer el número de ceros reales de un polinomio nos permite:**

- Obtener la gráfica y;
- Encontrar el comportamiento de la función en cualquier punto de la misma.

**TEOREMA DEL RESIDUO:**

Si el polinomio  $P(x)$  se divide por  $x - c$ , entonces el residuo es  $P(c)$ .

Por ejemplo:

Si dividimos:  $(x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 7) \div (x - 3)$ , por división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 3 & 1 & +3 & -9 & 0 & -7 \\
 & & +3 & +18 & +27 & +81 \\
 \hline
 & 1 & +6 & +9 & +27 & +74
 \end{array}$$

Residuo

(The value +74 is circled in the original image, with an arrow pointing to it from the word "Residuo".)

Comprobación:

$$P(3) = (3)^4 + 3(3)^3 - 9(3)^2 - 7 = 81 + 81 - 81 - 7 = 74$$

**TEOREMA DEL FACTOR:**

$P(c) = 0$  si y sólo si  $x - c$  es un factor de  $x$ .

Por ejemplo:

Para comprobar que  $x - 3$  es factor del polinomio  $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ , realizamos la división:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 3 & 1 & -4 & +1 & +6 \\
 & & +3 & -3 & -6 \\
 \hline
 & 1 & -1 & -2 & 0
 \end{array}$$

Residuo

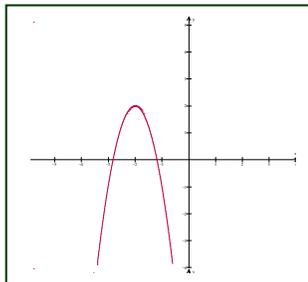
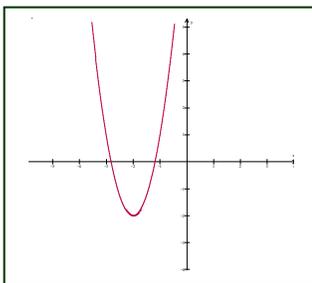
(The value 0 is circled in the original image, with an arrow pointing to it from the word "Residuo".)

Como el residuo es cero, entonces podemos decir que  $x - 3$  si es un factor del polinomio.

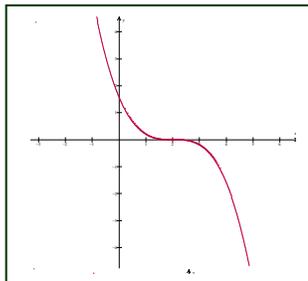
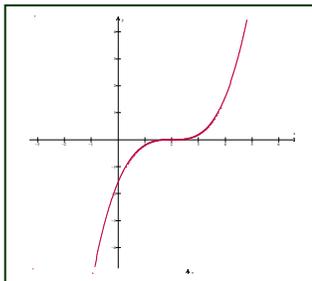
## GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

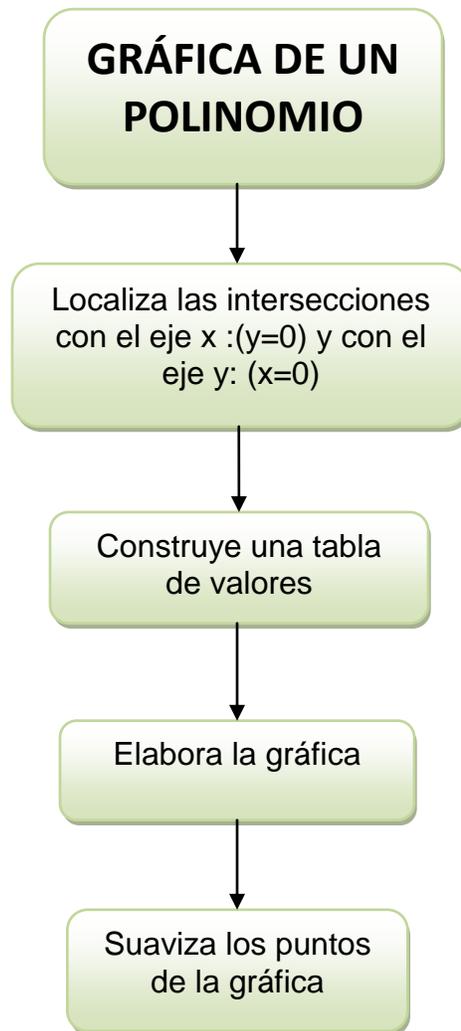
Para la función:  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

- Cuando el grado  $n$  de la función es par, la gráfica se presenta de la forma:



- Cuando el grado  $n$  de la función es impar, la gráfica tomará la forma:





1.- INTERSECCIONES CON LOS EJES: Para encontrar los puntos de intersección con el eje x, se factoriza el polinomio y se iguala cada factor a cero y para encontrar el punto de intersección con el eje y, se da valor a x de cero ( $x=0$ ) en la función.

2.- La tabla de valores se construye asignando valores arbitrarios a x, que se encuentren antes, entre y después de los valores encontrados en el paso anterior.

3.- Se elabora la gráfica, con los puntos de intersección y la tabla de valores, eligiendo una escala adecuada a dichos valores.

4.- Se unen los puntos trazando suavemente, para poder determinar el comportamiento de la función.

Ejemplo:

Para trazar la gráfica de la función:  $x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 18x - 15 = 0$

Utilizando la ley de los signos de Descartes, se determina el número de ceros reales que tiene la función.

Ceros positivos:

$$P(x) = + + + - -$$

1 cambio de signo: 1 cero real (+)

$$P(-x) = + - + + -$$

3 cambios de signo: 3 ceros reales (-)

Por lo tanto la gráfica tendrá una intersección en x positiva y tres en x negativa.

Posibles ceros:

$$\frac{\text{Factores de } p}{\text{Factores de } q} = \frac{\pm 1, 3, 5, 15}{\pm 1}$$

Utilizando el teorema del factor, se prueba con algunos de ellos:

$$f(-1) = (-1)^4 + 6(-1)^3 + 2(-1)^2 - 18(-1) - 15$$

$$f(-1) = 1 - 6 + 2 + 18 - 15 = 21 - 21 = 0 \longleftarrow \text{Es factor}$$

Efectuando la división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 6 & 2 & -18 & -15 \\ & & -1 & -5 & 3 & 15 \\ \hline & 1 & 5 & -3 & -15 & 0 \end{array}$$

Basado en el resultado de la división, podemos dividir la expresión en dos factores:

$$f(x) = (x + 1)(x^3 + 5x^2 - 3x - 15)$$

Se prueba otro factor:

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 15$$

$$f(-3) = (-3)^3 + 5(-3)^2 - 3(-3) - 15 = -27 + 45 + 9 - 15$$

$$f(-3) = -42 + 54 = 12 \longleftarrow \text{No es factor}$$

Se prueba otro factor:

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 15$$

$$f(-5) = (-5)^3 + 5(-5)^2 - 3(-5) - 15$$

$$f(-5) = -125 + 125 + 15 - 15 \longleftarrow \text{Es factor}$$

Efectuando la división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -5 & 1 & 5 & -3 & -15 \\
 & & -5 & 0 & 15 \\
 \hline
 & 1 & 0 & -3 & 0
 \end{array}$$

Basado en el resultado de la división, podemos dividir la expresión en tres factores:

$$f(x) = (x + 1)(x + 5)(x^2 - 3)$$

Una vez que hemos llegado a un factor de segundo grado, se resuelve por cualquier método ya conocido.

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

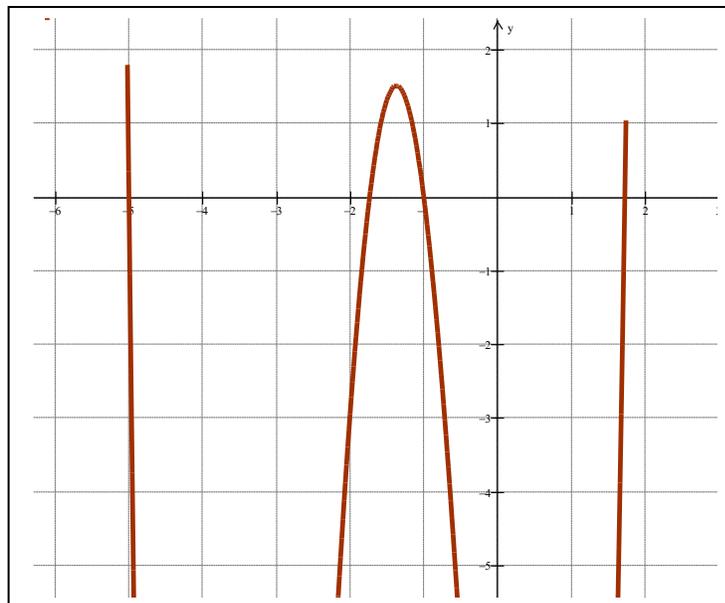
De acuerdo a lo anterior:

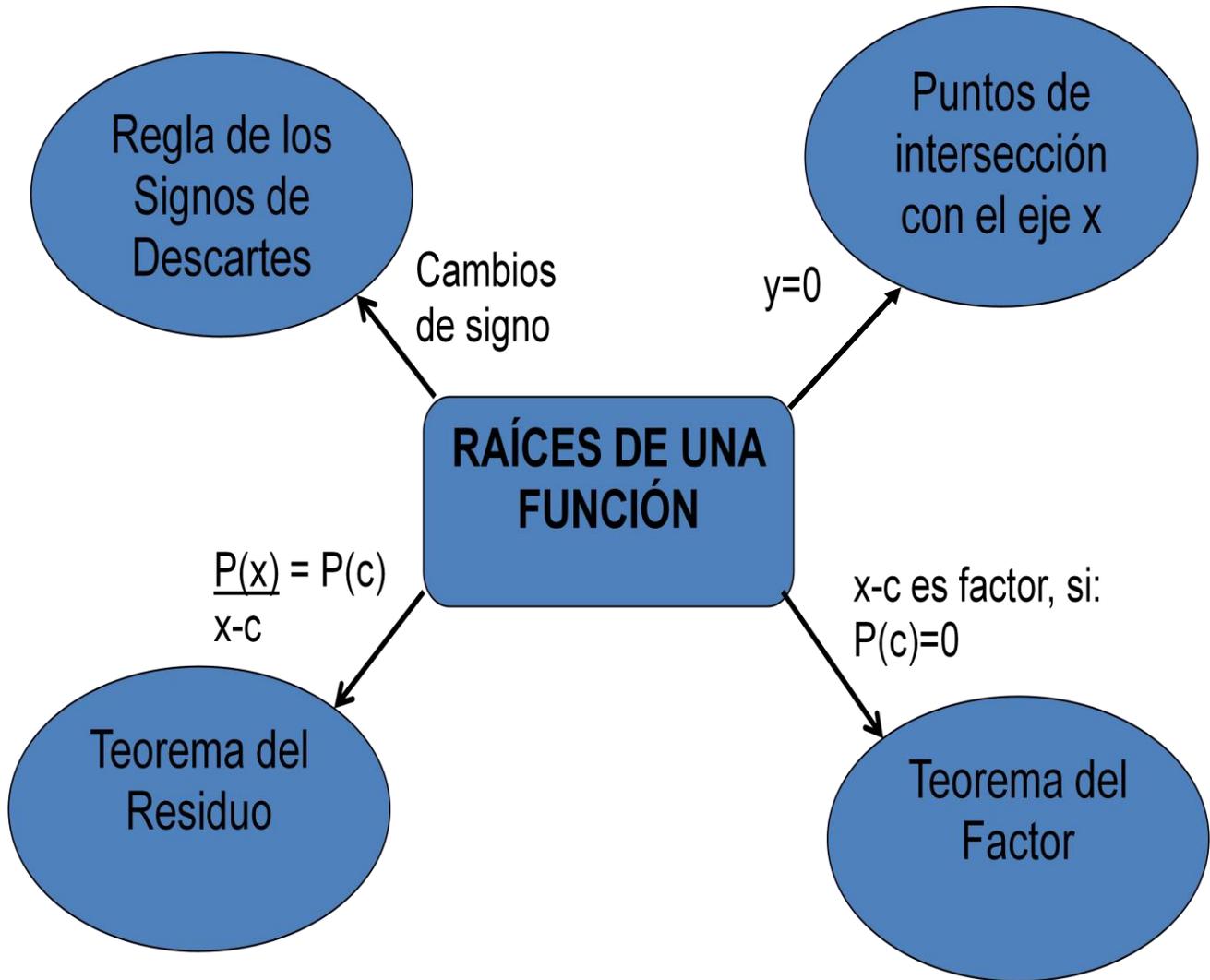
$$f(x) = (x + 1)(x + 5)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

Los puntos de intersección con el eje x se obtienen igualando cada factor a 0, por lo tanto:

$$x_1 = -1 \quad x_2 = -5 \quad x_3 = -\sqrt{3} \quad x_4 = \sqrt{3} \quad 3 \text{ negativos y } 1 \text{ positivo}$$

Dando valores arbitrarios a la x, tenemos la gráfica:





## TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES:

En este tema se propone pedir al alumno hacer una predicción acerca del comportamiento de una gráfica modificándola en un término, basados en la gráfica original. Por ejemplo:

¿Qué pasaría con la gráfica de una función si cambio  $f(x)$  por:

$f(x)+C$

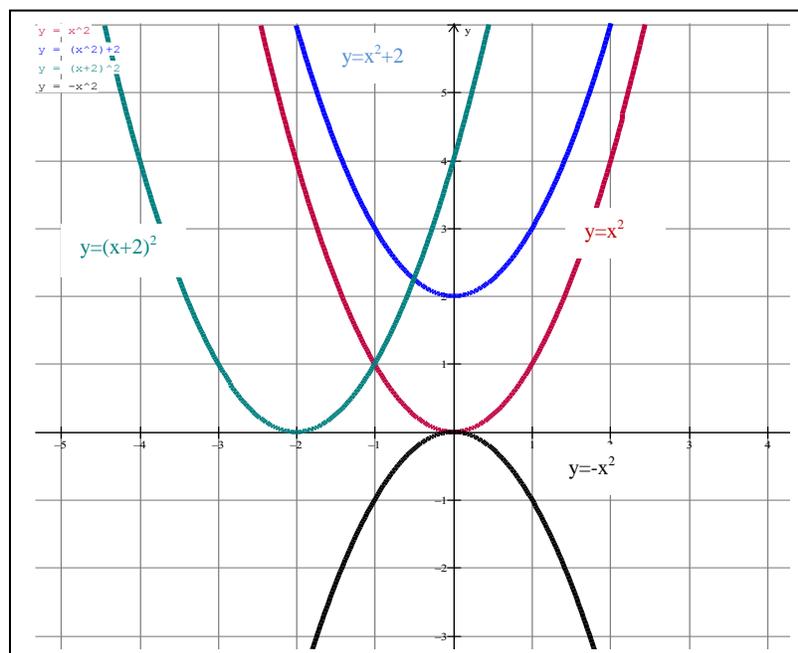
$f(x+C)$

$f(-x)$

$-f(x)$

Observemos lo que pasa con la gráfica de la función  $f(x)=x^2$ :

Si  $C = 2$



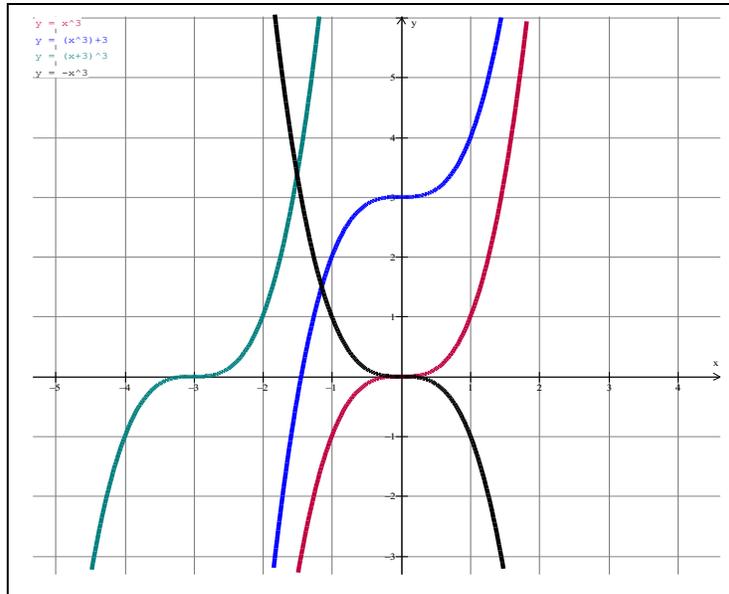
1.- ¿Qué sucedió con el vértice de la parábola de  $f(x)+2$ , con respecto al vértice de  $f(x)$ ?

2.- ¿Qué sucedió con el vértice de la parábola de  $f(x+2)$ , con respecto al vértice de  $f(x)$ ?

3.- ¿Qué le sucedió al vértice de la parábola de  $-f(x)$ , con respecto al de  $f(x)$ ?

4.- ¿Pasó lo mismo con los demás puntos de cada parábola?

Ahora veamos que sucede con la función  $f(x)=x^3$ :



Para estas gráficas  $C=3$

¿Qué pasaría con la gráfica si el valor de  $C$  fuera negativo?

## FUNCIÓN RACIONAL

Se define como el cociente de dos polinomios. Es una función del tipo:

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

El dominio de esta función está determinado por el denominador. Es necesario evitar la división entre cero, la cual causaría una indeterminación en el valor de la función.

Para obtener la gráfica de una función racional, se recomienda llevar a cabo los siguientes pasos:



1.- La factorización se lleva a cabo por cualquiera de los métodos ya conocidos.

2.- Puntos de intersección:

a) Con el eje x: (y=0)

La función se hace cero cuando el numerador se hace cero, es decir, cuando uno o más factores del numerador son cero, por lo tanto se iguala cada factor del numerador a cero. (Nota: el número de factores es igual al número de puntos de corte con el eje).

b) Con el eje y: (x=0)

Se sustituye el valor de x por cero en la función.

3.- La asíntota o asíntotas verticales se encuentran cuando el valor de la función se indetermina, es decir cuando se presenta una división entre cero, por lo tanto, se iguala cada factor del denominador a cero. (Nota: el número de factores es igual al número de asíntotas verticales de la función).

4.- La asíntota horizontal se encuentra siempre y cuando el grado del numerador en la función no sea mayor en uno al grado del denominador.

El procedimiento para encontrar la asíntota horizontal es el siguiente:

a) Se divide cada uno de los términos de la función entre la variable de grado más alto que tiene el denominador.

b) Se hace el valor de x igual a  $\infty$  (infinito).

c) Se hace el cálculo, teniendo en cuenta que un número dividido entre un número muy grande ( $\infty$ ) tiende a cero.

5.- La asíntota oblicua o inclinada existe cuando el grado del numerador excede en la unidad al del denominador, de esta manera, se puede llevar a cabo la división de polinomios por el método convencional.

Una vez que se haya hecho la división, se expresa su resultado con todo y residuo

$$\text{en la forma: } y = mx + b + \frac{\text{residuo}}{Q(x)}$$

Ecuación de la  
Asíntota oblicua,  
donde:  
m = pendiente de la  
recta  
b = ordenada en el  
origen

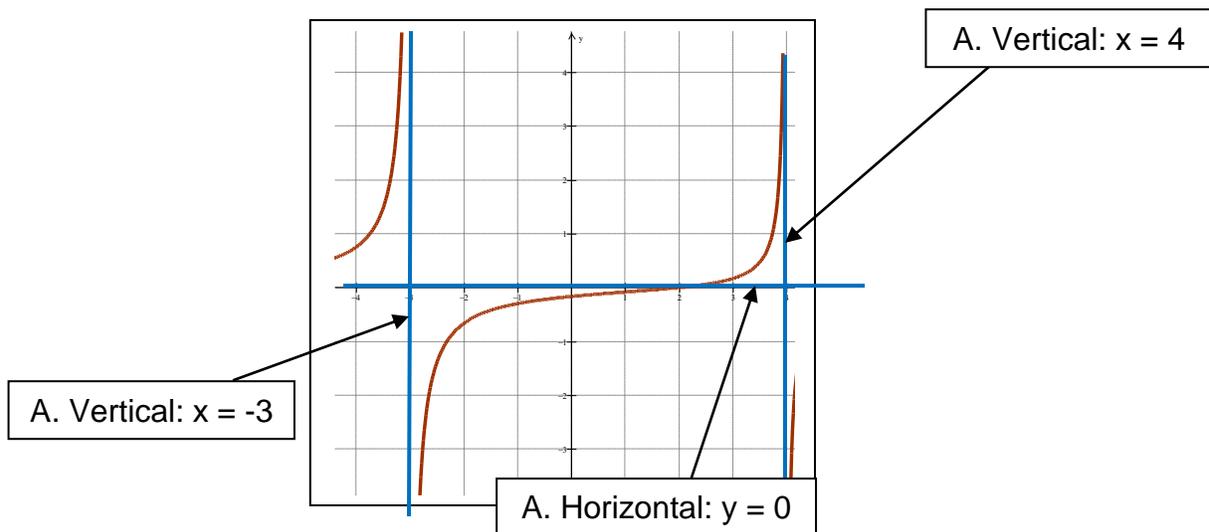
**Nota:** Si una función tiene asíntota horizontal, no presentará asíntota oblicua y viceversa.

Aplicando los pasos anteriores, para la función:  
se puede obtener su gráfica.

$$g(x) = \frac{2-x}{x^2-x-12}$$

<p><b>FACTORIZACIÓN:</b></p> $g(x) = \frac{2-x}{(x-4)(x+3)}$	<p><b>INTERSECCIÓN CON EL EJE "x" (y=0)</b></p> $2-x=0$ $x=2$ <p>(2,0)</p>	<p><b>INTERSECCIÓN CON EL EJE "y" (x=0)</b></p> $g(x) = \frac{2-x}{(x-4)(x+3)}$ $g(x) = \frac{2-0}{(0-4)(0+3)}$ <p>(0,-1/6)</p>
<p><b>ASÍNTOTAS VERTICALES</b></p> $x-4=0 \quad x+3=0$ $x=4 \quad x=-3$	<p><b>ASÍNTOTAS HORIZONTALES</b></p> $g(x) = \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{12}{x^2}}$ <p><math>x \rightarrow \infty</math></p> $g(x) = \frac{\frac{2}{\infty^2} - \frac{1}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty} - \frac{12}{\infty^2}}$ $g(x) = \frac{0-0}{1-0-0}$ <p><math>g(x) = 0</math></p>	<p><b>ASÍNTOTAS OBLÍCUAS</b></p> <p>No tiene</p>

**GRAFICA:**



## FUNCIONES EXPONENCIALES

Son curvas que presentan un crecimiento rápido y repentino. Se expresan como:

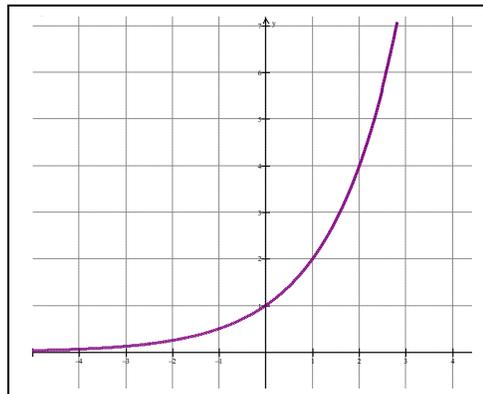
$$f(x) = a^x$$

Donde  $a$  (la base de la función) es cualquier número real positivo diferente de 1, el dominio (valores de  $x$ ) es el conjunto de los números reales y el rango, el conjunto de los números reales positivos.

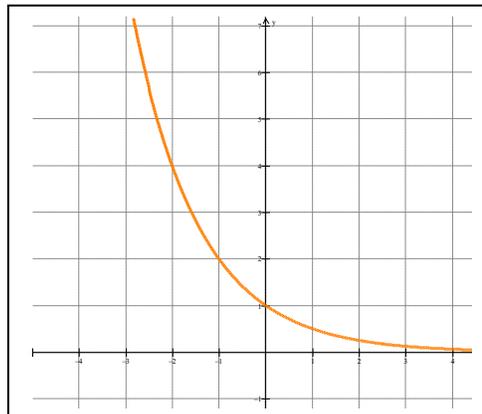
Este tipo de funciones se presentan frecuentemente en fenómenos como el crecimiento poblacional, la desintegración de isótopos radiactivos, el cálculo del interés compuesto bancario, la velocidad de reacciones, la propagación de enfermedades, etc.

La gráfica de una función exponencial es una curva que presenta un crecimiento o disminución rápido o repentino.

Si  $a > 1$ , la curva será creciente:



Si  $0 < a < 1$ , la gráfica será decreciente:



El número e es una constante irracional y una de las bases más importantes de las funciones exponenciales (probablemente la de mayor importancia) ya que se presenta en muchos fenómenos naturales y cuya función exponencial se expresa como:

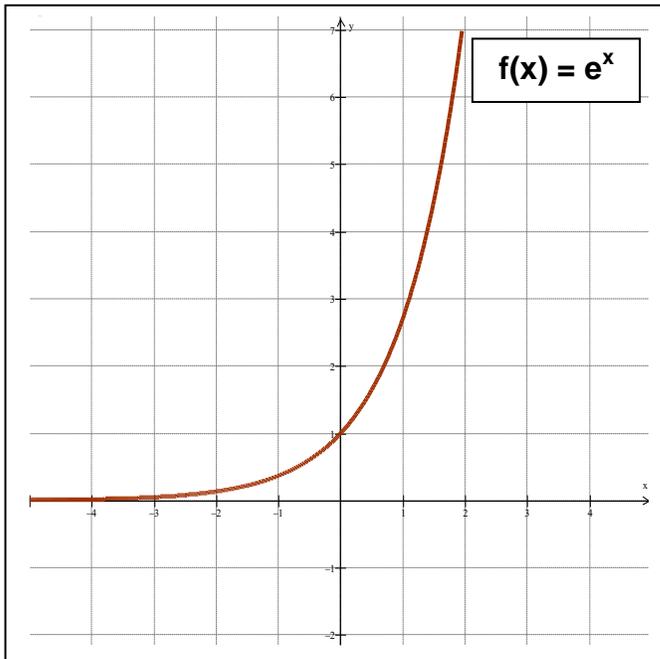
$$f(x) = e^x$$

Donde:

$$e = 2.718281828459045.....$$

Para obtener la gráfica de la función exponencial, solo basta dar valores a x y encontraremos los valores de f(x).

Por ejemplo:



x	y
-4	0.0183
-3	0.0497
-2	0.1353
-1	0.3678
0	1
1	2.7182
2	7.3890

## FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Un logaritmo es un exponente. La función logarítmica es la función inversa a la exponencial, por lo que el dominio de una será el rango de la otra y viceversa:

Dominio: Será el conjunto de los números reales positivos.

Rango: Cualquier número real positivo diferente de 1.

Se expresa como:

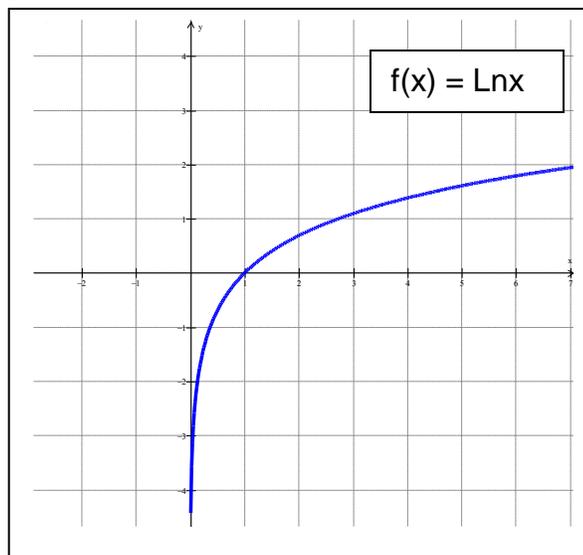
$$f(x) = \log_a x$$

Se lee: “f de x es igual al logaritmo base a de x”.

Cuando la base a, es el número e, la expresión se convierte en un logaritmo natural y se representa:

$$f(x) = \ln x$$

Para obtener la gráfica de un logaritmo, solo basta dar valores a x y encontraremos los valores de f(x).



x	y
1/2	-0.6931
1	0
2	0.6931
3	1.0986
4	1.3892
5	1.6094
6	1.7917
7	1.9459

---

## IV.- DESARROLLO. EJERCICIOS DE APLICACIÓN DE CONCEPTOS:

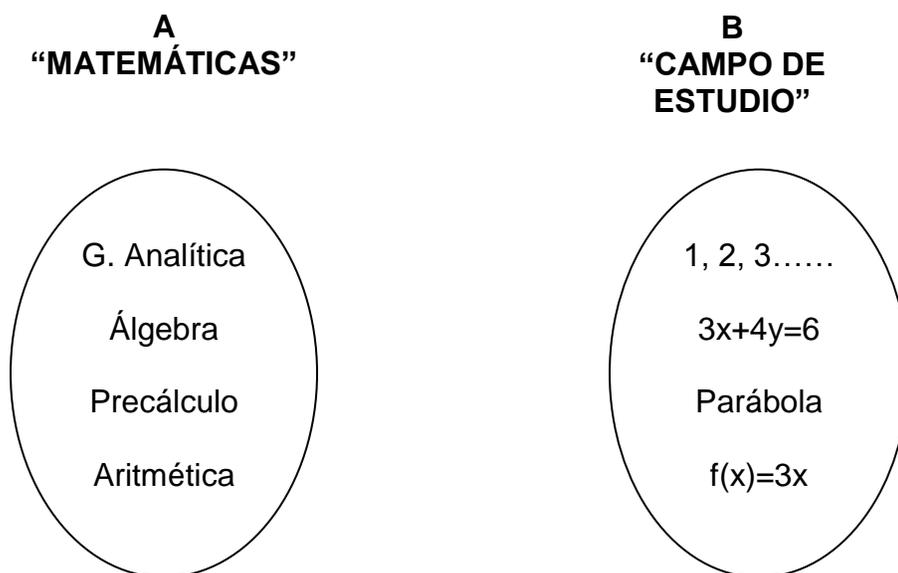
### CONCEPTO DE RELACIÓN Y FUNCIÓN:

1.- Investiga qué estudia cada una de las siguientes áreas de las matemáticas y elabora un mapa conceptual donde las organices según su área de estudio.

- Aritmética
- Cálculo
- Geometría Analítica
- Álgebra
- Precálculo

De acuerdo con tu diagrama:

- a) ¿Cuáles son los conocimientos que consideras necesarios para este curso?  
b) Establece las relaciones entre las siguientes parejas de datos. Utiliza flechas para unir un elemento del conjunto A (Matemáticas) con el conjunto B (Campo de estudio).



c) Expresa la relación como pares ordenados.

d) ¿Consideras que la relación anterior es también una función? ¿Por qué?

e) ¿Es función inyectiva o sobreyectiva? ¿Por qué?

f) Si tuvieras que agregar otro par ordenado, ¿Cuál pondrías?

2.- El hombre por naturaleza es un ser social, a lo largo de su vida establece una gran cantidad de relaciones sociales;

¿Cuáles de las siguientes relaciones consideras tú que deberían ser inyectivas (uno a uno) y cuáles deben ser sobreyectivas?

- a) Amistad
- b) Noviazgo
- c) Matrimonio
- d) Relación de trabajo

3.- ¿Cómo expresarías las siguientes funciones que son situaciones comunes como las siguientes?

- a) El costo del pasaje de camión por “x” número de personas.
- b) El área de un triángulo.
- c) El perímetro de un rectángulo.
- d) El volumen de un cilindro.
- e) La cantidad de aluminio necesaria para el marco de una ventana rectangular.

### NOTACIÓN DE FUNCIONES

4.- De las siguientes expresiones matemáticas escribe dentro del paréntesis, una F si se trata de una función, una P si es un polinomio y una E si es una ecuación.

- $3x - y = 7$ ..... ( )
- $f(x) = 3x - 7$ ..... ( )
- $5n^2 + 2m - 3$ ..... ( )
- $3x - y - 7$ ..... ( )
- $p + q - 2 = 0$ ..... ( )
- $5m^3 + 2m^2 - m + 3 = 0$ ..... ( )
- $p(q) = q + 2$ ..... ( )
- $n(m) = m^3 + m^2 + m + 1$ ..... ( )
- $p + q - 2$ ..... ( )

## **FUNCIÓN LINEAL**

5.- Estás en el Paso, Tx. y el locutor de una cadena de radio reporta una temperatura de  $97^{\circ}\text{F}$ , si la temperatura es la misma en Cd. Juárez:

- a) ¿Qué temperatura reportaría el locutor de radio en dicha ciudad?
- b) Escribe el modelo (conversión) que utilizaste para hacer el cambio de temperaturas.
- c) Escríbelo ahora en forma de función. ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Cuál es la variable independiente? ¿Por qué?
- d) Construye una tabla de valores y grafica la función tomando como referencia diferentes temperaturas como:  $70$ ,  $80$ ,  $90$  y  $110^{\circ}\text{F}$ .

6.- Tu familia va a construir una alberca en tu casa, las dimensiones del patio donde estará ubicada son de  $15\text{m}$  de ancho por  $20$  de largo. Tu mamá quiere que la alberca ocupe solo la mitad del patio y que el ancho de la misma tenga  $3\text{m}$  menos que el largo. ¿Cuáles serán las dimensiones de la alberca?



7.- La contaminación del aire es un problema muy grave en la actualidad que es causado por factores como la creciente cantidad de automóviles, las descargas de humos industriales, basura, escombros, aguas residuales, etc.

En cierta ciudad, se midió la concentración de ozono en el aire a lo largo de las 24 horas del día. Se observaron 4 etapas importantes:

I) Antes de las 13 horas, los niveles de ozono fueron menores a los 100 puntos IMECA.

II) A las 13 horas, se observaron niveles de 100 puntos IMECA y a partir de ahí cada hora había una variación de 20 puntos hasta las 17 horas.

III) De las 17 horas en adelante, se observó una disminución de 10 puntos IMECA por cada hora transcurrida hasta las 22 horas.

4) De las 22 a las 24 horas, los niveles de ozono se mantuvieron constantes.

a) Establece la función que muestra el comportamiento de los niveles de ozono entre las 13 y las 17 horas.

b) Establece la función que muestra el comportamiento de los niveles de ozono entre las 17 y las 22 horas.

c) ¿Cuál sería el modelo que describiría el comportamiento durante las dos últimas horas del día?

d) Construye la gráfica

e) ¿Qué son los puntos IMECA?

f) De acuerdo a la información mostrada en el ejercicio, ¿El índice de contaminación por ozono en la atmósfera de la ciudad es considerado como contaminante?

g) ¿En qué grado? Realiza las investigaciones pertinentes.



## **FUNCIÓN LINEAL Y FUNCIÓN CUADRÁTICA**

8.- El perímetro de una pista de baile rectangular es de 200 m.

- a) Encuentra su longitud y ancho, si la longitud es 10 m más larga que el ancho.
- b) ¿Cómo expresarías la variación del perímetro? ¿Cuál sería tu variable dependiente y cuál la independiente?
- c) Una función también se puede expresar como una gráfica, construye la gráfica que define a esta función.
- d) ¿Cuál será el área que ocupará esta pista? Escribe la expresión en forma de función.
- e) Si cada persona ocupa un espacio de  $1\text{m}^2$  cuando está bailando, ¿Cuántas parejas podrán estar en la pista al mismo tiempo?
- f) Construye ahora la gráfica para tu nueva función.
- g) ¿Cómo crees tú que un inspector de gobierno calcula el cupo máximo de un “antro”?
- h) ¿Cuál es la diferencia entre las dos gráficas que construiste? ¿Por qué?

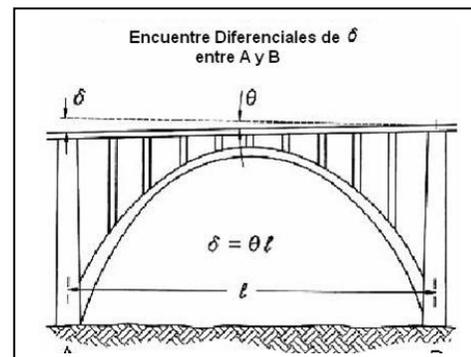


9.- En el caso del problema no. 6, tu mamá quiere llenar la alberca sólo a  $\frac{2}{3}$  de su capacidad total y la altura de la alberca es la treceava parte de su largo:

- a) ¿Cuál sería el volumen de agua utilizado en la alberca?
- b) ¿Cómo expresarías la función para una alberca de cualquier longitud?

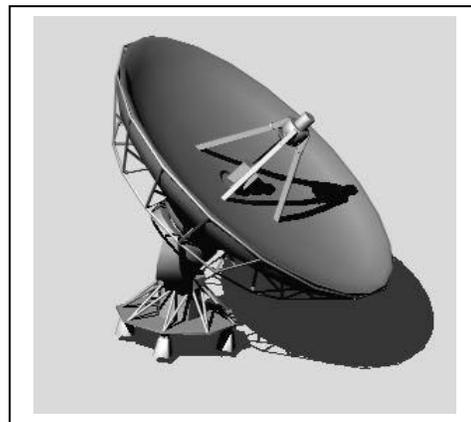
10.- Para tener una mayor fluidez sobre la Ave. Teófilo Borunda, el municipio de Chihuahua construirá un puente de forma parabólica. Se ha informado que los camiones de carga pesada no deberán pasar por dicho puente debido a sus dimensiones, ya que tiene una altura de 4 m en el centro y un ancho de 6 m. Si este tipo de camiones tienen un ancho de 2.5 m de ancho,

- a) ¿Crees tú que el municipio tiene razón al restringir la pasada de camiones por el puente?
- b) ¿Cuál es la altura máxima que debe tener uno de estos camiones para poder utilizar dicho puente? Justifica tus respuestas.
- c) Construye la gráfica de tu función.



11.- En tu casa deciden comprar una antena parabólica y cancelar el servicio del cable. La antena tiene un diámetro de 2 m y una profundidad de 40 cm.

- a) ¿Dónde estará colocado el receptor de la señal?
- b) ¿Cuál es la función matemática que describe la parábola que se forma con las distintas señales recibidas en la antena?
- c) ¿Podrías afirmar que si la antena es más grande, el número de señales recibidas será mayor?
- d) Consideras que la localización del receptor es importante? ¿Por qué? Justifica tus respuestas.



12.- Se va a construir una alberca circular. El diámetro de la alberca es el doble de su altura.

- a) Escribe la función que describe el volumen de agua máximo que puede contener la alberca.
- b) Si se duplica el diámetro de la alberca y se llena de agua a  $\frac{3}{4}$  de su volumen total, a qué altura quedará?
- c) Elabora la gráfica que muestre el cambio de volumen de la alberca, si variamos su diámetro.



**PROYECTOS:****1.- Caja de cartoncillo.**

Debe construirse una caja abierta a partir de una hoja cuadrada de cartoncillo, cortando cuadrados de lado y doblando las orillas hacia arriba.

a) Elige las dimensiones de la caja si la única condición para tu diseño es que tenga  $2 \text{ m}^3$  de capacidad y el largo de la caja debe ser el doble que su ancho.

b) Si la caja debe tener  $2 \text{ m}^3$  de capacidad y una altura de 20 cm, ¿Qué dimensiones deberá tener tu caja?

**2.- Puentes colgantes:**

Cuando un cable sostiene un peso homogéneo mucho mayor que su propio peso, de tal forma que el peso del cable es despreciable, éste toma la forma de una parábola, que está definida por la siguiente expresión:

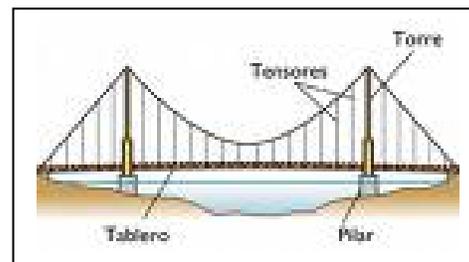
$$y = \frac{m}{H} x^2$$

Donde:

M = masa en kg. del puente

H = Tensión Horizontal

H = T Cos $\theta$



En equipo:

- Diseñen y construyan un puente colgante a escala (la que ustedes deseen)
- Obtengan el modelo que describe a la función.
- Elaboren la gráfica que representa la función.

**3.- Diseño de una lata de refresco o jugo.**

El equipo deberá diseñar y elaborar un contenedor cilíndrico del material y dimensiones que el equipo elija.

- a) Obtener el modelo matemático que describe el volumen de la lata.
- b) Obtener la gráfica.
- c) Si el volumen que se requiere almacenar es de 525 ml. ¿Cuál será el diámetro y la altura de la lata de refresco, si se pretende que la altura de la misma sea el doble de su diámetro?

Nota:  $1\text{ ml} = 1\text{ cm}^3$



---

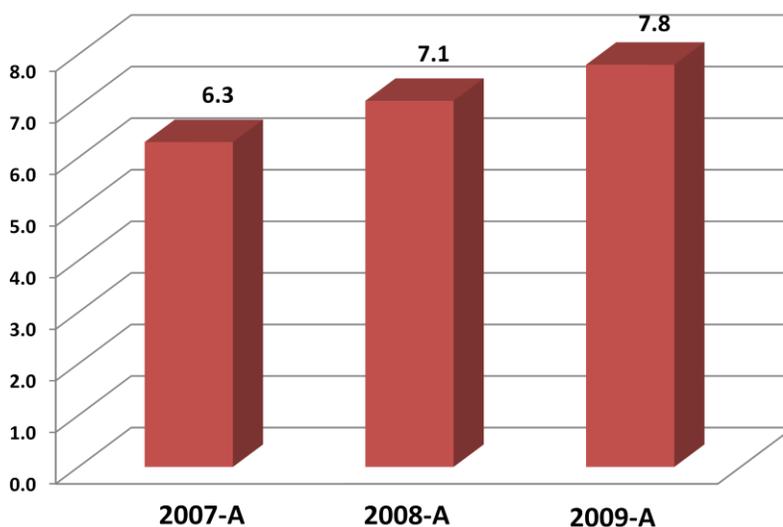
## V.- IMPLEMENTACIÓN

A continuación se presentan algunas estadísticas que muestran los resultados obtenidos antes y después de la aplicación de algunas de las estrategias sugeridas en la presente tesis.

Cabe mencionar que las estadísticas mostradas corresponden a un grupo por año (2007, 2008 y 2009) y aún cuando se trate de sujetos diferentes, la muestra tomada es muy similar en cuanto a tamaño.

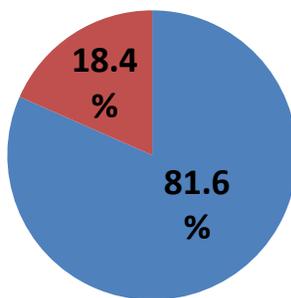
SEMESTRE	2007-A		2008-A		2009-A	
	BIM 1	BIM 2	BIM 1	BIM 2	BIM 1	BIM 2
<b>No. Alumnos</b>	<b>49</b>	<b>49</b>	<b>48</b>	<b>48</b>	<b>51</b>	<b>51</b>
<b>Promedio</b>	<b>5.9</b>	<b>6.5</b>	<b>5.7</b>	<b>6.0</b>	<b>6.9</b>	<b>8.0</b>
<b>Aprobados</b>	<b>33</b>	<b>40</b>	<b>22</b>	<b>28</b>	<b>41</b>	<b>45</b>
<b>Reprobados</b>	<b>16</b>	<b>9</b>	<b>26</b>	<b>20</b>	<b>10</b>	<b>6</b>
<b>% Aprobación</b>	<b>67.3</b>	<b>81.63</b>	<b>47.8</b>	<b>58.33</b>	<b>80.39</b>	<b>88.2</b>

### % Eficiencia

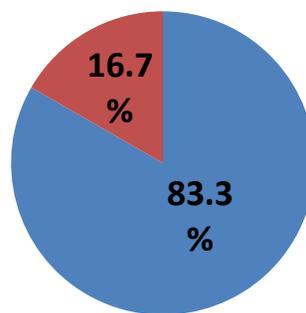


# Estadísticas:

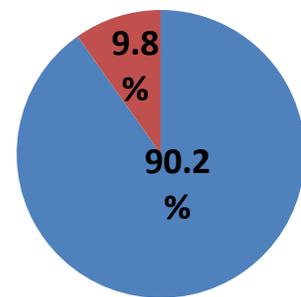
## % Aprobación Semestral



**2007-A**



**2008-A**



**2009-A**

Puede apreciarse claramente la diferencia entre los años en los que no se aplicó la estrategia sugerida (2007 y 2008) y el año en el que sí se hizo.

## **Sugerencias de evaluación:**

A continuación se hacen algunas sugerencias de evaluación que pueden ser aplicadas en cualquiera de los momentos del proceso enseñanza- aprendizaje (Diagnóstica, formativa y sumativa).

Además mediante estos instrumentos de evaluación, se están evaluando tanto conocimiento, como desempeño y producto.

### **LISTA DE COTEJO (Solución de problemas)**

<b>ASPECTO A EVALUAR</b>	<b>SI</b>	<b>NO</b>
1.- Trabaja con orden		
2.- Establece los datos iniciales		
3.- Presenta procedimiento		
4.- Realiza los cálculos correctamente		
5.- Presenta los resultados de una forma clara y precisa		
6.- Interpreta resultados		
7.- Contesta las preguntas correctamente		
8.- Elabora conclusiones		

## RÚBRICA (Mapa Conceptual)

Aspecto a evaluar	Mal (0)	Necesita Mejorar (1)	Bien (2)	Muy Bien (3)
1.- Las relaciones que establece entre conceptos son válidas.				
2.- Las jerarquías que utiliza son válidas y están bien ubicadas				
3.- Utiliza correctamente los conectores				
4.- Los ejemplos utilizados son coherentes con el concepto al que está relacionado				
5.- Es fácil de entender				
6.- Trabaja con limpieza				

## RÚBRICA (Proyecto)

Aspecto a evaluar	Pobre (0)	Regular (1)	Bien (2)	Muy Bien (3)
1.- Organización de la información				
2.- Investigación extraclase				
3.- Planteamiento claro del problema				
4.- Procedimientos (Proceso de razonamiento)				
5.- Limpieza				
6.- Resultados claros				
7.- Resultados correctos				

---

## VI.- CONCLUSIONES

- ✓ Los conocimientos previos son la base para construir nuevos conocimientos. Como maestros debemos procurar que nuestros alumnos adquieran un aprendizaje significativo, pues más adelante tendrán que hacer uso de las herramientas que les proporcionemos.
- ✓ Las competencias son esas habilidades, destrezas y conocimientos que el alumno adquiere para poder utilizarlos en su vida cotidiana.
- ✓ Para lograr que el aprendizaje tenga un “significado” es necesario que el docente incluya en su planeación actividades atractivas y creativas para el estudiante, lo cual permitirá crear un ambiente de participación, interés y calidez en clase.
- ✓ La planeación es un proceso importantísimo en el quehacer del docente. La improvisación lo entorpece, ya que no permite la orientación del conocimiento hacia la formación del estudiante y en ocasiones solo lo confunde.
- ✓ Es importante que nuestros alumnos estén motivados, esto se verá reflejado en la actitud que presenten hacia el maestro y sobre todo en la disponibilidad para adquirir nuevos conocimientos.
- ✓ El proceso de enseñanza aprendizaje debe ser evaluado de una manera continua y los criterios de evaluación establecidos por el docente deben ser coherentes con las competencias a desarrollar.
- ✓ No es fácil que nuestros estudiantes mantengan un interés constante en la materia y mucho menos que esta se les facilite a todos ellos; el enfoque basado en competencias representa una nueva esperanza para todos, ya que es una forma diferente de trabajo, más dinámica y sobre todo está centrada en el aprendizaje significativo.

---

## **BIBLIOGRAFÍA**

- ❖ ARGUDÍN YOLANDA. 2008. La educación y las competencias, Las competencias laborales derivan en competencias educativas, Habilidades y Valores. Educación Basada en Competencias Nociones y Antecedentes. Editorial Trillas. México. pp. 25 - 29, 29 - 38, 51 - 62.
- ❖ ARRIAGA CORONILLA, ALFONSO Y BENÍTEZ CASTAÑEDO, MARCOS M. 2009. La Parábola. Matemáticas 3. Ed. Progreso. México. pp. 108 – 134.
- ❖ CÁZARES APONTE LESLIE, CUEVAS DE LA GARZA JOSÉ FERNANDO, 2008. Las competencias: un invitado sorpresa en el mundo de la educación, Evaluación y Competencias, De la Tradición educativa a la evaluación transformadora. Planeación y Evaluación Basadas en Competencias. Editorial Trillas. México. pp. 13 - 6, 10 - 135.
- ❖ CUÉLLAR, JUAN ANTONIO. 2008. La recta, Parábola. Geometría Analítica. Ed. Mc Graw Hill. México. pp. 87 – 132, 174 – 212.
- ❖ DE OTEYEZA, ELENA. 2007. La línea recta, La Parábola. Conocimientos Fundamentales de Matemáticas, Trigonometría y Geometría Analítica. Ed. Pearson Educación. México. pp. 91 – 165, 233 – 290.
- ❖ DÍAZ-BARRIGA ARCEO, FRIDA y GERARDO HERNÁNDEZ ROJAS. 2007. Constructivismo y Aprendizaje significativo, Motivación Escolar y sus Efectos en el Aprendizaje, Estrategias de enseñanza para la Promoción de Aprendizajes Significativos. Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Mc Graw Hill. México. pp. 23 - 61, 63 - 96, 137- 226.
- ❖ FUENLABRADA, SAMUEL. 2004. Relaciones y Funciones. Cálculo Diferencial. Ed. Mc Graw Hill. México. pp. 1 – 30.
- ❖ GARCÍA LICONA, MIGUEL ANGEL Y RODRÍGUEZ LÓPEZ MANUEL. 2005. Funciones Inversas. Matemáticas 4, Funciones. ST Editorial. México. pp. 87-109.
- ❖ HERNÁNDEZ FORTE VIRGILIO, 2007, Las bases del conocimiento conceptual, Enseñar con los mapas conceptuales, El mapa conceptual como instrumento de la didáctica. Mapas conceptuales la gestión del conocimiento en la didáctica. Alfa omega. México. pp. 95 - 100, 125 - 151, 207 - 225
- ❖ IBÁÑEZ CARRASCO, PATRICIA Y GARCÍA TORRES, GERARDO. 2006. La función cuadrática como caso especial de la función polinomial. Matemáticas IV, Precálculo. Ed. Thomson. México.

- ❖ JIMÉNEZ, RENÉ. 2006. Funciones polinomiales, funciones racionales. Funciones. Ed. Pearson Educación. México. pp. 51 – 90, 114 – 125.
- ❖ LÓPEZ FRÍAS BLANCA SILVIA, HINOJOSA KLEEN ELSA MARÍA. 2002. Técnicas para la evaluación del desempeño. Evaluación del Aprendizaje. Editorial Trillas. México. pp. 85 - 132.
- ❖ MÉNDEZ HINOJOSA, ARTURO. 2007. Matemáticas 4. Ed. Santillana. México.
- ❖ PURCEL, VARBERG Y RIGDON. 2007. Gráficas de Ecuaciones, Funciones y sus gráficas, Operaciones con funciones. Cálculo Diferencial e Integral. Ed. Pearson – Prentice Hall. México. pp. 25 – 40.
- ❖ RAMÍREZ APAEZ MARISSA. ROCHA JAIME MARICELA PATRICIA. Que es la educación basada en competencias, Enfoque por competencias y los docentes, El aprendizaje significativo y la labor docente. Guía para el desarrollo de Competencias Docentes. Editorial Trillas. México. pp. 7 - 9, 10 - 21, 22 - 37.
- ❖ REYES GONZÁLEZ ALEJANDRO. 2002. Competencias para la calidad en la educación, Planear: diseño para la mejora del aprendizaje. Técnicas y Modelos de calidad en el salón de clases. Editorial trillas. México. pp. 55 - 65, 71 - 82.
- ❖ RUÍZ BASTO, JOAQUÍN. 2006. Función racional, Funciones exponencial y logarítmica. Matemáticas IV, Precálculo: Funciones y Aplicaciones. Ed. Publicaciones Cultural. México. pp. 80 – 91, 100 – 123.
- ❖ SPIEGEL MURRAY R. Y MOYER ROBERT E. 2007. Funciones y gráficas, Secciones Cónicas. Álgebra Superior, Ed. Mc Graw Hill, México. pp. 89 – 113, 169 – 190.
- ❖ SULLIVAN, MICHAEL. 2006. Funciones y sus gráficas. Álgebra y Trigonometría. Ed. Pearson Educación. México. pp. 217 - 490.
- ❖ ZAMARRÓN DE CAMPOS, LUCÍA. 2006. Relaciones y funciones, Función racional . Matemáticas cuarto curso. Ed. Global Educational Solutions. México. pp. 2 – 28, 102 – 117.
- ❖ <http://www2.uah.es/jmc/webens/INDEX.html> no. 7 pedagogía
- ❖ [http://www.sems.udg.mx/rib-ceppems/ACUERDO1/Reforma\\_EMS\\_3.pdf](http://www.sems.udg.mx/rib-ceppems/ACUERDO1/Reforma_EMS_3.pdf) -
- ❖ <http://66.102.1.104/scholar?hl=es&lr=&q=cache:Z-eeYajuLLYJ:dialnet.unirioja.es/servlet/dcart%3Finfo%3Dlink%26codigo%3D243382%26orden%3D23754+ense%C3%B1anza+de+ciencias+en+m%C3%A9xico>
- ❖ <http://www.usuarios.com/ib305128/doment61n.htm>

---

## **Agradecimientos:**

- Al Gobierno del Estado de Chihuahua, al Centro Chihuahuense de Estudios de Posgrado (CCHEP), al Consejo Estatal Para la Planeación y Programación de la Educación Media Superior (CEPPEMS) y sobre todo al Centro de Investigación de Materiales Avanzados (CIMAV), por la oportunidad que me brindaron al permitirme ser parte de este proyecto.
- A mi director y subdirector del COBACH 3, por las facilidades y el apoyo recibido, en el logro de una de mis metas.
- A mis maestros por su dedicación en este proyecto y por compartir con nosotros sus valiosos conocimientos.
- A mi familia por el apoyo recibido, por la unión, el cariño y la solidaridad que día a día me demuestran.
- A mis directores de tesis por toda la paciencia y apoyo que me brindaron durante el desarrollo de este trabajo, sin los cuales no hubiera sido posible la realización de este proyecto.

A los que directa o indirectamente forman parte de este trabajo... Gracias

María Guadalupe Jáquez Carrasco, 2009

---